Paradoxon von Braess

Unter der Annahme, dass ein Verkehrsfluss immer zu einem Gleichgewicht hin tendiert, hat Braess 1968 folgendes Phänomen entdeckt:

Es kann durchaus sein, dass eine Senkung der Kosten auf einer Straße die Verkehrsflusskosten insgesamt erhöht!

Paradoxon von Braess: ... Tafel.

Es ist folglich keinesfalls garantiert, dass der Neu- oder Ausbau einer Straße dem Verkehr insgesamt dient!

Diskrete Verkehrsflüsse

Im diskreten Verkehrsflussmodell muss jeder Spieler seinen Bedarf d_i enlang eines ganzzahligen Flusses von s_i nach t_i schicken.

Die Strategiemengen sind somit $X_i = \{f^i : \mathcal{P}_i \to \mathbb{Z}_+ \mid \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f^i_P = d_i\}$ und damit endlich.

Erinnerung: Im (kontinuierlichen) Wardrop-Modell waren die Strategiemengen $X_i^c = \{f^i : \mathcal{P}_i \to \mathbb{R}_+ \mid \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f^i_P = d_i\}$ konvex und kompakt.

Bemerkung: Im "Atomic selfish routing"-Modell muss jeder Spieler i seinen gesamten Bedarf d_i entlang eines einzigen Pfades $P \in \mathcal{P}_i$ schicken.

Gleichgewichte im diskreten Verkehrsflussmodell

Definition 1.6.

Ein diskret zulässiger Fluss f^* ist ein Gleichgewicht (diskreter Nash-Fluss), wenn für alle i und alle Paare $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ mit $f_P^* > 0$ gilt

Satz 8.

Sind die Kantenfunktionen c_e monoton wachsend, dann existiert ein diskreter Nash-Fluss und kann algorithmisch konstruiert werden.

Beweis: ... Tafel.

Rosenthal's Auslastungsspiele

Das diskrete Verkehrsflussmodell ist im Fall $d_i = 1$ ein Spezialfall einer Klasse von Rosenthal untersuchter n-Personenspiele mit endlichen Strategiemengen (Matrixspielen).

Definition 1.7.

Ein Auslastungsspiel ("Congestion Game") ist ein Tupel $(N, R, \{S_i\}_{i \in N}, \{c_r\}_{r \in R})$,bestehend aus einer Spielermenge N, einer endlichen Resourcenmenge R, Strategiemengen $S_i \subseteq 2^{|R|}$ für jedes $i \in N$, und Kostenfunktionen $c_r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Die Kostenfunktion c_r ist von der Auslastung (Anzahl der r benutzenden Spieler) abhängig, und gibt die entstehenden Kosten/Verzögerung auf Resource r an.

Rosenthal's Auslastungsspiele (Forts.)

In einem Auslastungsspiel $(N, R, \{S_i\}_{i\in N}, \{c_r\}_{r\in R})$ wählt jeder Spieler $i \in N$ eine seiner Strategien $X^{(i)} \in S_i$ (mit Inzidenzvektor $x^{(i)}$). Die Komponente x_r von $x = \sum_{i\in N} x^{(i)}$ gibt dann die Anzahl der Spieler an, die Resource $r \in R$ in ihrer gewählten Strategie hat.
Die Kosten für Spieler i ergeben sich als $C^{(i)}(x) := \sum_{r\in X^{(i)}} c_r(x_r)$.

Theorem 1.8.

Rosenthal's Auslastungsspiele besitzen ein Nash-Gleichgewicht (im üblichen Sinne).

Beweis: ... Tafel.

Beispiel Maschinenbelegungen: ... siehe Tafel.

Fixpunkte bei diskreten Mengen

Sätze vom Kakutani-Typ geben (ausser bei Randomisierung) keine Hilfe, wenn die Strategiemengen $X_1, \dots, X_n$ der Spieler diskret sind.

Wir betrachten eine Menge X und eine (teilmengenwertige) Funktion $f : X \to 2^X$ und fragen uns, wann die Existenz eines Fixpunkts, d.h. eines $x^* \in X$ mit $x^* \in f(x^*)$ garantiert ist.

Annahmen:

1. Auf X ist eine Halbordnung $P = (X, \leq)$ gegeben.
2. Bzgl. $(X, \leq)$ ist jede (absteigende) Kette $x_0 > x_1 > \dots$ endlich.

Typische Beispiele: ... siehe Tafel.

Tarski's Fixpunktsats

Sind zwei Halbordnungen $P = (X, \leq_P)$ und $Q = (Y, \leq_Q)$ gegeben, dann erhält man in natürlicher Weise eine Halbordnung $P \times Q = (X \times Y, \leq)$ mit
$$(x, y) \leq (x', y') \iff x \leq_P x' \text{ und } y \leq_Q y'.$$

Beobachtung: $P \times Q$ besitzt die Eigenschaft (2) gdw. sowohl P als auch Q die Eigenschaft (2) besitzen.

Ein (Ordnungs-)Homomorphismus von $P = (X, \leq)$ ist eine Abbildung $h : X \to X$ mit
$$x \leq y \implies h(x) \leq h(y).$$

Theorem 1.9.

Sei $P = (X, \leq)$ eine Halbordnung mit der Eigenschaft (2) und $h : X \to X$ ein Homomorphismus. Genau dann besitzt h einen Fixpunkt, wenn es ein $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft $h(x_0) \leq x_0$ gibt.

Beweis: . . . Tafel.