Hauptsatz über abgeschlossene konvexe Mengen

Der *Hauptsatz über abgeschlossene konvexe Mengen* kann auch "spieltheoretisch", mit Hilfe von Satz 1, bewiesen werden:

Satz 2.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere abgeschlossene und konvexe Menge und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k \setminus C$ beliebig. Dann existiert ein $\mathbf{x}^* \in C$ und ein $\mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^k$ mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{a}^*)^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{a}^*)^T\mathbf{x}^* < (\mathbf{a}^*)^T\mathbf{p} \quad \forall \mathbf{x} \in C.$$

Bemerkung: Der "Satz von der trennenden Hyperebene" bildet die Grundlage für zahlreiche Beweise in der Linearen Programmierung, wie z.B. Farkas' Lemma, Starke Dualität, ...

Beweis: ... (siehe Tafel.) □

Fixpunktsatz von Kakutani

Kakutani hat 1941 aus dem Brouwer'schen Fixpunktsatz einen allgemeineren Fixpunktsatz abgeleitet:

Satz 3.

Unter den Annahmen

(K1) X ist eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

(K2) $f : X \to 2^X$ ist eine teilmengenwertige Funktion derart, dass

1. die Mengen $f(\mathbf{x})$ nichtleer, kompakt und konvex, und
2. die Mengen $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2m} \mid \mathbf{y} \in f(\mathbf{x})\}$ abgeschlossen sind,

existiert ein Punkt $\mathbf{x}^* \in X$ mit der Eigenschaft $\mathbf{x}^* \in f(\mathbf{x}^*)$.

Beweis: hier ohne Beweis (technisch sehr aufwendig).

Satz 1 folgt als Spezialfall, wenn man wieder $f(\mathbf{a}) := B_1(\mathbf{a}_{-1}) \times \ldots \times B_n(\mathbf{a}_{-n})$ wählt, und zeigt, dass die im Satz 1 geforderten Eigenschaften die Eigenschaften (K1) und (K2) implizieren.

Fixpunktsätze garantieren zwar die Existenz von Gleichgewichten, geben aber keinerlei Anleitung, wie diese berechnet werden können.

Randomisierung von Matrixspielen

Erinnerung: Bei *Matrixspielen* bzw. strategischen Spielen in *Standardform* gehen wir davon aus, dass die Strategiemengen in $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ endlich sind. Sei nun $X_i = \{x_1^i, \dots, x_{i_m}^i\}$, $i \in N$.

Achtung: Nichttriviale endliche Menge sind nicht konvex! Folglich finden die Fixpunktesätze von Nikaido-Isoda oder Kakutani hier keine Anwendung.

Randomisierte Matrixspiele: Jeder Spieler wählt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi^i = (p_1^i, \dots, p_{m_i}^i)$ auf seiner Strategiemenge $X_i = \{x_1^i, \dots, x_{i_m}^i\}$ und zieht dann eine konkrete Strategie, die er schliesslich spielt, gemäss π^i.

Spieler i spielt demnach Strategie $x \in X_i$ mit W'keit $\pi^i(x) = p_j^i$, wenn $x = x_j^i$.

Randomisierte Matrixspiele (Forts.)

Beim Übergang zur randomisierten Version ersetzt somit jeder Spieler i die Menge X_i durch die Menge $\Delta_{m_i} := \{(p_1, \dots, p_{m_i}) \mid p \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} p_j = 1\}$ aller W'keitsverteilungen auf X_i.

Die Simplizes Δ_{m_i} sind kompakte und konvexe Menge. Folglich ist auch $\Delta := \Delta_{m_1} \times \dots \times \Delta_{m_n} \subseteq \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n}$ konvex und kompakt.

Der erwartete Nutzen/Gewinn für Spieler i ist nun

$$U_i(\pi^1, \dots, \pi^n) = \sum_{x=(x_1,\dots,x_n) \in X} u_i(x) \pi^1(x_1) \dots \pi^n(x_n).$$

Beobachtung: Die U_i sind als Summe von Produkten stetiger Funktionen auf Δ stetig, und in jeder Komponente linear (und damit konkav).

Satz von Nash

Der Satz von Nash ist somit eine Folgerung von Satz 1:

Korollar 1.
Das randomisierte Matrixspiel mit den Strategiemenge Δ_{m_i} und den Nutzenfunktionen U_i besitzt ein Gleichgewicht.

Terminologie: Bei randomisierten Spielen heißen die ursprünglichen Strategiemengen X_i oft reine Strategien. Die W'keitsverteilungen $\pi^i \in \Delta_{m_i}$ sind dann gemischte Strategien.

Reine Strategien $x \in X_i$ entsprechen der gemischten Strategie π^i mit $\pi^i(x) = 1$ (und $\pi^i(x') = 0$ für $x \neq x' \in X_i$).

Nullsummen-Spiele

Definition 1.3.
Ein Matrixspiel mit Nutzenfunktionen $\{u_i\}_{i \in N}$ heißt Nullsummenspiel, wenn es eine Zahl u^* gibt, so dass für jedes Profil $\mathbf{x} \in X$ gilt $u_1(\mathbf{x}) + \ldots + u_n(\mathbf{x}) = u^*$.

Bemerkung: Die Terminologie erklärt sich daraus, dass man oBdA $u^* = 0$ annehmen kann. (Ansonsten ersetze u_i durch $\bar{u}_i := u_i - \frac{u^*}{n}$ und erhalte ein im Wesentlichen gleiches Spiel mit $\bar{u}_1(\mathbf{x}) + \ldots + \bar{u}_n(\mathbf{x}) = 0$.)

Im Fall $|N| = 2$ gilt $u_2(\mathbf{x}) = -u_1(\mathbf{x})$, d.h. der eine Spieler gewinnt, was der andere verliert.

Bemerkung: Bei Zwei-Personen-Nullsummen-Matrixspielen genügt es in der Auszahlungsmatrix nur die Komponente des Zeilenspielers anzugeben.

Gleichgewichte bei 2-Personen-Nullsummen-Spielen

Jahre vor Nash hat von Neumann erkannt:

Satz 4.

Randomisierte Nullsummen-Matrixspiele mit zwei Spielern besitzen immer (mindestens) einen Gleichgewichtspunkt.

Wir werden den Satz in einer allgemeineren Form beweisen. Sei dazu Γ ein 2-Personen-Nullsummenspiel mit abgeschlossenen Strategiemengen X bzw. Y und Nutzenfunktionen $u_1(x, y) = -u_2(x, y)$ für alle $(x, y) \in X \times Y$.

Bemerkung: Die Funktion $L : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $u_1(x, y) = L(x, y) = -u_2(x, y)$ heißt auch Lagrangefunktion von Γ.

Satz 5.

(x^*, y^*) ist ein Gleichgewicht bzgl. L gdw. für alle $(x, y) \in X \times Y$ gilt

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} L(x, y) = L(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} L(x, y).$$

Beweis: ... Tafel.