Kooperative Spiele

Bisher (bei strategischen Spielen): Die Spieler spielen gegeneinander, versuchen ihren persönlichen Nutzen zu maximieren (bzw. ihre Kosten zu minimieren.)

Jetzt (bei kooperativen Spielen): Die Spieler der Menge N können miteinander kooperieren, um den größtmöglichen gemeinsamen Nutzen zu erzeugen.

Zentrale Frage: Welcher Wert soll dem Einzelspieler als fairer anteiliger Gewinn (oder Verlust) zubemessen werden?

Annahmen/Begriffe:

- Wir nehmen $N = \{1, \dots, n\}$ als endlich an.
- Die Teilmengen $S \subseteq N$ werden Koalitionen genannt.
- Der Wert einer Koalition $S \subseteq N$ wird durch $v(S) \in \mathbb{R}$ ausgedrückt.

Definition kooperativer Spiele

Definition 2.1.

Ein kooperatives Spiel ist ein Tupel $\Gamma = (N, v)$ mit einer endlichen Menge N und einer Funktion $v : 2^N \to \mathbb{R}$.

Die Funktion $v : 2^N \to \mathbb{R}$ wird charakteristische Funktion, oder (je nach Interpretation) Nutzen- oder Kostenfunktion des Spiels $\Gamma = (N, v)$ genannt.

Bemerkung: Wir setzen vorraus, dass $v(S)$ bekannt, oder zumindest explizit berechenbar ist. Außerdem nehmen wir $v(\emptyset) = 0$ an.

Beispiele:

1. Owens Produktionsspiel (... siehe Tafel)
2. Auktionsspiel (... siehe Tafel)
3. Vernetzungsspiel (... siehe Tafel)

Lösungskonzepte

Generell suchen wir nach Allokationen $x \in \mathbb{R}^N$, die den Spielern $i \in N$ eines kooperativen Spiels $\Gamma = (N, v)$ einen "fairen" Wert x_i zuweisen.

Was dabei "fair" heißt, ist nicht von vornherein mathematisch klar gegeben, sondern wird erst definiert (auf verschiedene Weisen).

Ein (mathematisch spezifizierter) Allokationsmodus heißt Lösungskonzept, oder einfach Lösung des Spiels.

Ertrags- und Kostenspiele

Man kann den Wert $v(S)$ einer Koalition $S \subseteq N$ als Ertrag betrachten, den S durch Kooperation erwirtschaften kann, oder aber $v(S)$ könnte die Kosten darstellen, die Koalition S durch Kooperation entstehen.

Bei einem Ertragsspiel $\Gamma = (N, v)$ kann man im Modell davon ausgehen, dass sich Koalition S in kleinere Gruppen aufteilen würde, wenn der Gesamtwert der Koalition dadurch verbessert würde. Wir betrachten dann das Spiel $(N, \tilde{v})$ mit
$\tilde{v}(S) := \max\{\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \mid S_1, \ldots, S_k$ paarw. disjunkte TMen von $S\}$.

Wegen $\emptyset \subseteq S$ gilt $\tilde{v}(S) \geq 0$. Außerdem gelten

- $S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad \tilde{v}(S) \leq \tilde{v}(T)$ (Monotonie)
- $S \cap T = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \tilde{v}(S \cup T) \geq \tilde{v}(S) + \tilde{v}(T)$ (Superadditivität)

Analog betrachten wir bei Kostenspielen (N, c)
$\tilde{c}(S) := \min\{c(S_1) + \ldots c(S_k) \mid S_i$ paarweise disjunkt und $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S_i\}$.

Dann ist für $c \geq 0$ die Funktion $\tilde{c}$ monoton und es gilt

- $S \cap T = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \tilde{c}(S \cup T) \leq \tilde{c}(S) + \tilde{c}(T)$ (Subadditivität)

Der Core

Das Lösungskonzept des Core (engl. Kern) geht auf von Neumann zurück.

Idee: Bei einer vorgeschlagenen Allokation $x \in \mathbb{R}^N$ vergleicht jede Koalition $S \subseteq N$ den ihr zugeteilten Wert $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$ mit ihrem Ertragswert $v(S)$.

In einer fairen Allokation sollte keine Koalition weniger als den von ihr erwirtschafteten Wert zugewiesen bekommen.

Außerdem sollte insgesamt nicht mehr als $v^* = \tilde{v}(N)$ verteilt werden.

$$\text{core}(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v^* \text{ und } x(S) \geq v(S) \forall S \subseteq N\}.$$

Lemma 2.2.

Sei (N, v) ein Ertragsspiel. Dann gilt $\text{core}(\tilde{v}) = \text{core}(v) \cap \mathbb{R}^N_+$.

Beweis: ...siehe Tafel.

Core (Forts.)

Analog definieren wir für Kostenspiele (N, c) den Core als

$$\text{core}(c) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \geq v^* \text{ und } x(S) \leq c(S) \forall S \subseteq N\}$$

Bemerkung: Für die mathematische Analyse ist es nicht relevant, ob wir den Core eines Ertrags- oder Kostenspiels analysieren. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns hier auf das Modell von Ertragsspielen.

Satz von Bondareva

Beobachtung: Der Core eines Spiels ist durch lineare Ungleichungen definiert (siehe Tafel). Der Core kann durchaus leer sein (Übung).

Die folgende Anwendung der Dualität linearer Programme ist in der Spieltheorie als "Satz von Bondareva" bekannt:

Theorem 2.3.

Für ein Ertragsspiel $\Gamma = (N, v)$ ist $\text{core}(v) = \emptyset$ gdw. $\exists y \in \mathbb{R}_+^{2^N}$ mit $\sum_{S \subseteq N} v(S) y_S > v^*$ und $\sum_{S : i \in S} y_S = 1$ für alle $i \in N$.

Beweis: ...siehe Tafel.

Approximativer Core und Auktionen

Im Fall $\text{core}(v) = \emptyset$ kann man zumindest nach einer Allokation x fragen, die die Idee des Cores möglichst gut verwirklicht.

Genauer gesagt fragen wir nach einer Optimallösung des LPs

$$(P) \quad \min\{\sum_{i \in N} x_i \mid x(S) \geq v(S) \text{ für alle } S \subseteq N\}.$$

Beobachtung: Das Problem eine ganzzahlige Lösung des zu (P) dualen LPs zu bestimmen ist gleich dem Problem des Auktionators im Auktionsspiel, den Gesamtwert $v^*(N)$ der zu ersteigernden Objekte zu bestimmen.

Ist x^* eine Optimallösung von (P), so kann x_i^* als "Marktwert" des Objekts $i \in N$ angesehen werden.

Beweis: ...siehe Tafel.