Kapitel 1: Strategische Spiele

Gleichgewichte bei Strategischen Spiele

Wir untersuchen in diesem Kapitel die Existenz von Gleichgewichtssituationen bei strategischen Spielen.

Sei $N = \{1, \dots, n\}$ eine endliche Menge von Spielern. In unserem Modell strategischer Spiele steht jedem Spieler $i \in N$ eine Strategiemenge X_i zur Verfügung. Nachdem jedes $i \in N$ ein $x_i \in X_i$ gewählt hat, erhalten wir die Gesamtsituation (Profil, Aktion)

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in X := X_1 \times \dots \times X_i \times \dots \times X_n.$$

Profil $\mathbf{x}$ ist eine Gleichgewichtssituation ("reines Nash Gleichgewicht"), wenn kein $i \in N$ durch Wahl einer anderen Strategie $x_i' \in X_i$ eine für ihn bessere Situation $(\mathbf{x}_{-i}, x_i') \in X$ herstellen kann.

Beispiel: Die Spieler sind Autofahrer, die einen Weg zwischen Start- und Zielpunkt wählen.

Nutzenfunktionen

Wir nehmen an, dass jeder Spieler $i \in N$ eine Situation $\mathbf{x} \in X$ mit einer (individuellen) Nutzenfunktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ bewertet.

Die dadurch induzierte Präferenzrelation (Prä-Ordnung) ist

$$\mathbf{x} \prec_i \mathbf{x}' \quad \Leftrightarrow \quad u_i(\mathbf{x}) < u_i(\mathbf{x}').$$

Bemerkung: Ein Präordnung auf X ist eine binäre Relation $\preceq$ so, dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$:

(i) $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}$ (Reflexivität)

(ii) $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ und $\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$ impliziert $\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}$ (Transitivität)

Übung: Sei $|N| = 1$ und $X = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie ein Beispiel einer Präordnung, die nicht von einer Nutzenfunktion induziert werden kann.

Spiele in Standartform

Bemerkung: Ein durch Nutzenfunktionen induziertes strategisches Spiel $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ ist in Standartform (bzw. ist ein Matrixspiel), wenn alle Strategien und Bewertungen explizit angegeben werden.

Standartformen sind vor allem bei 2 Spielern und wenigen Strategien sehr komfortabel. Oftmals sind Spiele nicht in Standartform repräsentierbar, da viel zu viele Spieler und Strategien involviert sind.

Alternative: Kompakt repräsentierte Spiele (später).

Dominante Strategien

Ein Profil $\mathbf{x}^* \in X$ wird dominante Lösung genannt, wenn für jeden Spieler i die Strategiewahl x_i^* stets optimal ist, d.h. unabhängig von der Strategiewahl der übrigen Spieler.

Formal ist somit $\mathbf{x}^*$ dominante Lösung wenn gilt

$$u_i(\mathbf{x}_{-i}, x_i^*) \geq u_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X, \forall i \in N.$$

Bemerkung: Eine dominante Lösung ist immer auch ein Gleichgewicht.

Welche der bisherigen Beispiele besitzen dominante Lösungen?

Transitivität

Wir haben gesehen: Es gibt Präferenzrelationen, die transitiv sind, aber nicht mit Nutzenfunktionen modelliert werden können. Darüberhinaus gibt es Präferenzrelationen, die nicht einmal transitiv sind.

Das folgende Beispiel geht auf den Marquis de Condorcet (1743–1794) zurück:

Beispiel von Condorcet: ... (siehe Tafel).

Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter auf diese interessanten Modellierungsaspekte ein, sondern gehen vereinfachend davon aus, dass die Präferenzrelationen der einzelnen Spieler von Nutzenfunktionen induziert sind.

Gleichgewichte und Fixpunkte

Die Frage nach einem Gleichgewicht kann als Frage nach einem Fixpunkt einer zugeordneten Funktion umformuliert werden.

Notation: Sei wieder $X := X_1 \times \ldots \times X_n$ und definiere für alle $i \in N$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ und $x \in X_i$:

$$\begin{aligned} X_{-i} &:= \quad X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n \\ \mathbf{a}_{-i} &:= \quad (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X_{-i} \\ \mathbf{a}_{-i}(x) &:= \quad (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X. \end{aligned}$$

Zu jedem Profil $\mathbf{a}' \in X_{-i}$ der übrigen Spieler bezeichne $B_i(\mathbf{a}') \subseteq X_i$ die Menge der "besten Antworten" von $i \in N$ auf $\mathbf{a}'$, d.h.

$$B_i(\mathbf{a}') = \{x \in X_i \mid u_i(\mathbf{a}'(x)) \geq u_i(\mathbf{a}'(y)) \quad \forall y \in X_i\}.$$

Dann ist ein Gleichgewichtspunkt gerade ein Punkt $\mathbf{a}^* \in X$ mit der Eigenschaft

$$a_i^* \in B_i(\mathbf{a}_{-i}^*) \quad \forall i \in N.$$

Gleichgewichte und Fixpunkte (Forts.)

Wir definieren nun die (mengenwertige) Funktion $f : X \to 2^X$ vermöge

$$f(\mathbf{a}) := B_1(\mathbf{a}_{-1}) \times \ldots \times B_n(\mathbf{a}_{-n}).$$

Dann ist $\mathbf{a}^*$ ein Gleichgewicht $\iff \quad \mathbf{a}^* \in f(\mathbf{a}^*)$.

Definition 1.1.

Unter einem Fixpunkt einer teilmengenwertigen Funktion $f : X \to 2^X$ versteht man ein $x^* \in X$ mit der Eigenschaft $x^* \in f(x^*)$.

Bemerkung: Der klassische Begriffs eines Fixpunktes einer Funktion $f : X \to X$ kann als Spezialfall angesehen werden (siehe Tafel.)

Gleichgewichte/ Fixpunkte sind i.A. nicht garantiert. Wir betrachten nun mathematische Modelle, die die Existenz von Gleichgewichten (bzw. Fixpunkten) garantieren.

Satz von Nikaido/Isoda

Sei $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ ein durch die Nutzenfunktionen $\{u_i\}_{i\in N}$ induziertes strategisches Spiel.

Satz 1.

Das strategische Spiel $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ besitzt ein Gleichgewicht, falls gilt

1. Die Menge X ist eine nichtleere kompakte und konvexe Menge in $\mathbb{R}^m$.
2. Die Funktionen u_i sind in jeder Komponente stetig und konkav.

Erinnerung: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist konkav, wenn die Funktion $g := -f$ konvex ist, d.h. wenn für jede Konvexkombination $\mathbf{z} = \lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + \lambda_h\mathbf{x}^{(h)}$ von Punkten $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(h)} \in X$ gilt

$$f(\mathbf{z}) = f(\lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}^{(h)}) \geq \lambda_1 f(\mathbf{x}^{(1)}) + \ldots + \lambda_h f(\mathbf{x}^{(h)}).$$

Beweis des Satzes von Nikaido-Isoda

Zum Beweis des Satzes charakterisieren wir zunächst die *Nicht-Existenz* eines Gleichgewichts. Sei dazu

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \sum_{i=1}^{n} u_i(\mathbf{a}_{-i}(a'_i)) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{a}' \in X.$$

Lemma 1.2.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es existiert *kein* Gleichgewicht.
2. Zu jedem $\mathbf{a} \in X$ gibt es ein $\mathbf{a}' \in X$ mit $G(\mathbf{a}, \mathbf{a}') > G(\mathbf{a}, \mathbf{a})$.

Beweis: ...Übung. □

Beobachtung: Ein Gleichgewicht existiert genau dann *nicht*, wenn die Mengen $\mathcal{O}(\mathbf{a}') = \{\mathbf{a} \in X \mid G(\mathbf{a}, \mathbf{a}') - G(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0\}$ (für $\mathbf{a}' \in X$) die Menge X überdecken.

Beweis des Satzes: ...(siehe Tafel.) □