Algorithmische Spieltheorie (ADM III)

Britta Peis

TU Berlin

SoSe 2013

Allgemeines

- Vorlesungen: Mittwochs, 10:15 – 11:45, MA 212
  Donnerstags, 12:15–13:45, MA 212
  (teilweise auch Freitags, 10:15–11:45, MA 751)
- Übungen: integriert, jeden zweiten Donnerstag in der Vorlesungszeit
- Scheinkriterien: **Aktive(!) Mitarbeit**
  (Fragen stellen, Hausaufgaben vorführen, ...),
  mündliche Prüfung oder Klausur am Ende des Semesters
- Studiengänge: (laut VL-Verzeichnis) Mathematik, Technomathematik und Wirtschaftsmathematik (BS,MS und D)
- Wünschenswerte Voraussetzungen: ADM I und ADM II
- Medien: Kombination aus Folien und Tafel.

Folien im Anschluß an VL auf `www.coga.tu-berlin.de/v-menue/lehre/ss13/vl_algorithmische_spieltheorie/`

Kapitel 0:
Einleitung und Überblick

Was ist Spieltheorie?

Die (mathematische) Spieltheorie ...

- stellt analytische Werkzeuge bereit, Situationen des täglichen Lebens zu modellieren, in denen mehrere Entscheidungsträger, die sogenannten Spieler, interagieren und gegenseitig den Ausgang des Geschehens beeinflussen.
- findet Anwendungen in der Politik, der Ökonomie, der Gesellschaftslehre, der Biologie, der Informatik, dem Internet, ...
- ist eine interdisziplinäre Wissenschaft an der Schnittstelle von Mathematik, Informatik und Wirtschafts-und Sozialwissenschaften.

Wir unterscheiden strategische (nicht-kooperative) und kooperative Spiele.

Spiele wie Schach, Mühle, Doppelkopf, etc. werden nicht (oder nur kaum) Bestandteil der VL sein.

Strategische Spiele (kurze Einführung)

Wir starten mit einem kleinen Beispiel, bekannt unter dem Namen "battle of the sexes (BoS)": ... (siehe Tafel).

Das Spiel kann über die folgende Matrix modelliert werden:

$$(BoS) \qquad \begin{array}{c|cc} & F & K \\ \hline F & (4,2) & (1,1) \\ K & (0,0) & (2,4) \end{array}$$

Definition strategischer Spiele

Definition 0.1.

Ein strategisches Spiel $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{\preceq_i\}_{i \in N})$ besteht aus einer Spielermenge $N = \{1, \ldots, n\}$, sowie Strategiemengen X_i und Präferenzrelationen $\preceq_i$ auf $X := X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ für jeden Spieler $i \in N$.

Es wird in davon ausgegangen, dass

- die Spieler *gleichzeitig* jeweils genau eine ihrer Strategien wählen ("one-shot simultaneaous move games"),
- die Spieler dabei nicht miteinander kommunizieren (nicht-kooperatives Spiel!),
- jeder Spieler vollständige Information über die Strategien und Präferenzen der übrigen Spieler besitzt,
- alle Spieler *rational*, also vernünftig spielen (sonst sind die Spiele kaum analysierbar).

Eine Strategiewahl $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ wird auch Profil oder Aktion genannt.

MaxMin-Strategie

In der mathematischen Spieltheorie wird versucht Srategiewahlen/Profile $\mathbf{x} \in X$ zu identifizieren und zu analysieren, die in gewissem Sinne rational oder stabil sind.

Betrachten wir z.B. die MaxMin-Strategie, die den garantierten Mindestgewinn maximiert.Die MaxMin-Strategie ist eine typische, und sicher auch vernünftige Wahl für Spieler, die nicht gerne ein hohes Risiko eingehen.

Was passiert, wenn beide Spieler in unserem Eingangsbeispiel (BoS) ihre MaxMin-Strategie wählen?

Gleichgewichtssituationen

Das wohl bekannteste Lösungskonzept ist das sogenannte "Nash Gleichgewicht",das zwar Nash's Dissertation (1950) zugeschrieben wird, aber schon auf Cournot (*Recherche sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*, Paris 1838) zurückzuführen ist.

Definition 0.2.

Eine Strategiewahl $\mathbf{x} \in X$ wird (reines) Nash Gleichgewicht genannt, wenn keiner der Spieler einen Grund hat, durch Wahl einer anderen Strategie $x_i' \in X_i$ eine aus seiner Sicht bessere Situation $(\mathbf{x}_{-i}, x_i') \in X$ herzustellen.

Dabei ist $(\mathbf{x}_{-i}, x_i') = \mathbf{x}_{-i}(x_i') = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

In einem Nash Gleichgewicht sind somit alle Spieler in gewissen Maße zufrieden, und wir können von einer *stabilen* Situation/Lösung sprechen.

Frage: Besitzt (BoS) Nash-Gleichgewichte? Wenn ja, welche?

Existenz, Berechenbarkeit und Güte von Gleichgewichten

Typische Fragestellungen in diesem Zusammenhang:

- Besitzt ein Spiel überhaupt Nash Gleichgewichte?
- Falls ja, sind sie effizient berechenbar?
- Falls nein, kann ich sie zumindest gut approximieren?
- Wie *sozial verträglich* ist ein Nash Gleichgewicht?

Weitere "klassische" Beispiele strategischer Spiele (siehe Tafel):

i "Prisoner's Dilemma"

ii "Pollution Game"

iii "Routing Game"

iv "Matching Pennies"

Kooperative Spiele (kurze Einführung)

Wir haben bereits gesehen: die Spieler können viel durch Kooperation gewinnen.

Allerdings: wir gehen von eigennützigen Spielern aus, d.h. das vordergründige Ziel eines jeden Spielers ist es, den eigenen Gewinn zu maximieren (bzw. die eigenen Kosten zu minimieren).

Ziel der kooperativen Spieltheorie ist es, unter den Spielern, die grundsätzlich zur Kooperation bereit sind, die Kooperation herbeizuführen und sie zu erhalten.

Zentrale Frage:

Wie sollte der Gesamtgewinn bzw. -verlust auf eine "faire" und stabile Weise unter den Spielern aufgeteilt werden?

Abstraktes Modell kooperativer Spiele

Definition 0.3.

Ein kooperatives Spiel ist ein Tupel $\Gamma = (N, c)$ bestehend aus einer Spielermenge $N = \{1, \ldots, n\}$ und einer Kosten- (bzw. Nutzen-, Gewinn-) funktion $c : 2^N \to \mathbb{R}$.

Die Teilmengen $S \subseteq N$ werden Koalitionen genannt und die Werte $c(S)$ werden als die durch Koalition S verursachten Kosten (Nutzen, Gewinne) interpretiert.

Je nach Situation unterscheiden wir zwischen Kosten- und Nutzenspielen. Strukturell gibt es keine Unterschiede, da sich die Spiele durch Multiplikation mit -1 ineinander überführen lassen.

Beispiel "Facility Location Game": ... (siehe Tafel).

Der Core kooperativer Spiele

Das Lösungskonzept des "Core" geht auf van Neumann zurück:

In einer fairen Kostenverteilung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ sollte keine Koalition mehr zahlen, als die durch sie verursachten Kosten, d.h. es sollte gelten:

$$\mathbf{x}(S) := \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \quad \forall S \subseteq N.$$

Definition 0.4.

Der Core eines kooperativen Spiels $\Gamma = (N, c)$ ist die Menge aller Vektoren im Polyeder

$$Core(N, c) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{x}(N) = c(N) \text{ und } \mathbf{x}(S) \leq c(S) \forall S \subseteq N\}.$$

Werden somit die Kosten (Gewinne, Verluste) entsprechend einer Allokation im Core verteilt, sieht keine Koalition einen Anreiz darin, sich von der großen Koalition N abzuspalten. Eine derartige Core-Lösung wäre in diesem Sinne stabil.

Nachteile des Cores, Ausblick

Nachteile des Core-Konzepts:

- Der Core kann durchaus leer sein (... Tafel).
- Einige Core-Lösungen sind fairer als andere.
- Selbst wenn der Core nicht leer ist, ist es oftmals sehr aufwendig, einen Core-Vektor zu bestimmen

Wir werden in der Vorlesung Spiele charakterisieren, bei denen der Core garantiert nicht leer, und Core-Vektoren effizient berechenbar sind.

Zudem werden wir weitere, alternative Lösungkonzepte kennenlernen und analysieren.

$\longrightarrow$ starke Zusammenhänge zwischen stabilen Lösungskonzepten und der linearen/konvexen Optimierung.

Literatur (wird möglicherweise erweitert):

- Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani (Eds.), *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007. (Online verfügbar, siehe WWW)
- Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein, *A Course in Game Theory*, MIT Press, 2001.
- Martin J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2004.
- Tim Roughgarden, *Selfish Routing and the Price of Anarchy*, MIT Press, 2005.
- M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, 1979.

Kapitel 1: Strategische Spiele

Gleichgewichte bei Strategischen Spiele

Wir untersuchen in diesem Kapitel die Existenz von Gleichgewichtssituationen bei strategischen Spielen.

Sei $N = \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Menge von Spielern. In unserem Modell strategischer Spiele steht jedem Spieler $i \in N$ eine Strategiemenge X_i zur Verfügung. Nachdem jedes $i \in N$ ein $x_i \in X_i$ gewählt hat, erhalten wir die Gesamtsituation (Profil, Aktion)

$$\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in X := X_1 \times \ldots \times X_i \times \ldots \times X_n.$$

Profil $\mathbf{x}$ ist eine Gleichgewichtssituation ("reines Nash Gleichgewicht"), wenn kein $i \in N$ durch Wahl einer anderen Strategie $x_i' \in X_i$ eine für ihn bessere Situation $(\mathbf{x}_{-i}, x_i') \in X$ herstellen kann.

Beispiel: Die Spieler sind Autofahrer, die einen Weg zwischen Start- und Zielpunkt wählen.

Nutzenfunktionen

Wir nehmen an, dass jeder Spieler $i \in N$ eine Situation $\mathbf{x} \in X$ mit einer (individuellen) Nutzenfunktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ bewertet.

Die dadurch induzierte Präferenzrelation (Prä-Ordnung) ist

$$\mathbf{x} \prec_i \mathbf{x}' \quad \Leftrightarrow \quad u_i(\mathbf{x}) < u_i(\mathbf{x}').$$

Bemerkung: Ein Präordnung auf X ist eine binäre Relation $\preceq$ so, dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$:

(i) $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}$ (Reflexivität)

(ii) $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ und $\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$ impliziert $\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}$ (Transitivität)

Übung: Sei $|N| = 1$ und $X = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie ein Beispiel einer Präordnung, die nicht von einer Nutzenfunktion induziert werden kann.

Spiele in Standartform

Bemerkung: Ein durch Nutzenfunktionen induziertes strategisches Spiel $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ ist in Standartform (bzw. ist ein Matrixspiel), wenn alle Strategien und Bewertungen explizit angegeben werden.

Standartformen sind vor allem bei 2 Spielern und wenigen Strategien sehr komfortabel. Oftmals sind Spiele nicht in Standartform repräsentierbar, da viel zu viele Spieler und Strategien involviert sind.

Alternative: Kompakt repräsentierte Spiele (später).

Dominante Strategien

Ein Profil $\mathbf{x}^* \in X$ wird dominante Lösung genannt, wenn für jeden Spieler i die Strategiewahl x_i^* stets optimal ist, d.h. unabhängig von der Strategiewahl der übrigen Spieler.

Formal ist somit $\mathbf{x}^*$ dominante Lösung wenn gilt

$$u_i(\mathbf{x}_{-i}, x_i^*) \geq u_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X, \forall i \in N.$$

Bemerkung: Eine dominante Lösung ist immer auch ein Gleichgewicht.

Welche der bisherigen Beispiele besitzen dominante Lösungen?

Transitivität

Wir haben gesehen: Es gibt Präferenzrelationen, die transitiv sind, aber nicht mit Nutzenfunktionen modelliert werden können. Darüberhinaus gibt es Präferenzrelationen, die nicht einmal transitiv sind.

Das folgende Beispiel geht auf den Marquis de Condorcet (1743–1794) zurück:

Beispiel von Condorcet: ... (siehe Tafel).

Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter auf diese interessanten Modellierungsaspekte ein, sondern gehen vereinfachend davon aus, dass die Präferenzrelationen der einzelnen Spieler von Nutzenfunktionen induziert sind.

Gleichgewichte und Fixpunkte

Die Frage nach einem Gleichgewicht kann als Frage nach einem Fixpunkt einer zugeordneten Funktion umformuliert werden.

Notation: Sei wieder $X := X_1 \times \ldots \times X_n$ und definiere für alle $i \in N$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ und $x \in X_i$:

$$\begin{aligned} X_{-i} &:= X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n \\ \mathbf{a}_{-i} &:= (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X_{-i} \\ \mathbf{a}_{-i}(x) &:= (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X. \end{aligned}$$

Zu jedem Profil $\mathbf{a}' \in X_{-i}$ der übrigen Spieler bezeichne $B_i(\mathbf{a}') \subseteq X_i$ die Menge der "besten Antworten" von $i \in N$ auf $\mathbf{a}'$, d.h.

$$B_i(\mathbf{a}') = \{x \in X_i \mid u_i(\mathbf{a}'(x)) \geq u_i(\mathbf{a}'(y)) \quad \forall y \in X_i\}.$$

Dann ist ein Gleichgewichtspunkt gerade ein Punkt $\mathbf{a}^* \in X$ mit der Eigenschaft

$$a_i^* \in B_i(\mathbf{a}_{-i}^*) \quad \forall i \in N.$$

Gleichgewichte und Fixpunkte (Forts.)

Wir definieren nun die (mengenwertige) Funktion $f : X \to 2^X$ vermöge

$$f(\mathbf{a}) := B_1(\mathbf{a}_{-1}) \times \ldots \times B_n(\mathbf{a}_{-n}).$$

Dann ist $\mathbf{a}^*$ ein Gleichgewicht $\Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}^* \in f(\mathbf{a}^*)$.

Definition 1.1.

Unter einem Fixpunkt einer teilmengenwertigen Funktion $f : X \to 2^X$ versteht man ein $x^* \in X$ mit der Eigenschaft $x^* \in f(x^*)$.

Bemerkung: Der klassische Begriffs eines Fixpunktes einer Funktion $f : X \to X$ kann als Spezialfall angesehen werden (siehe Tafel.)

Gleichgewichte/ Fixpunkte sind i.A. nicht garantiert. Wir betrachten nun mathematische Modelle, die die Existenz von Gleichgewichten (bzw. Fixpunkten) garantieren.

Satz von Nikaido/Isoda

Sei $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ ein durch die Nutzenfunktionen $\{u_i\}_{i\in N}$ induziertes strategisches Spiel.

Satz 1.

Das strategische Spiel $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ besitzt ein Gleichgewicht, falls gilt

1. Die Menge X ist eine nichtleere kompakte und konvexe Menge in $\mathbb{R}^m$.
2. Die Funktionen u_i sind in jeder Komponente stetig und konkav.

Erinnerung: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist konkav, wenn die Funktion $g := -f$ konvex ist, d.h. wenn für jede Konvexkombination $\mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \ldots + \lambda_h \mathbf{x}^{(h)}$ von Punkten $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(h)} \in X$ gilt

$$f(\mathbf{z}) = f(\lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}^{(h)}) \geq \lambda_1 f(\mathbf{x}^{(1)}) + \ldots + \lambda_h f(\mathbf{x}^{(h)}).$$

Beweis des Satzes von Nikaido-Isoda

Zum Beweis des Satzes charakterisieren wir zunächst die *Nicht-Existenz* eines Gleichgewichts. Sei dazu

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \sum_{i=1}^{n} u_i(\mathbf{a}_{-i}(a_i')) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{a}' \in X.$$

Lemma 1.2.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Es existiert *kein* Gleichgewicht.
2. Zu jedem $\mathbf{a} \in X$ gibt es ein $\mathbf{a}' \in X$ mit $G(\mathbf{a}, \mathbf{a}') > G(\mathbf{a}, \mathbf{a})$.

Beweis: ...Übung. □

Beobachtung: Ein Gleichgewicht existiert genau dann *nicht*, wenn die Mengen $\mathcal{O}(\mathbf{a}') = \{\mathbf{a} \in X \mid G(\mathbf{a}, \mathbf{a}') - G(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0\}$ (für $\mathbf{a}' \in X$) die Menge X überdecken.

Beweis des Satzes: ...(siehe Tafel.) □

Hauptsatz über abgeschlossene konvexe Mengen

Der *Hauptsatz über abgeschlossene konvexe Mengen* kann auch "spieltheoretisch", mit Hilfe von Satz 1, bewiesen werden:

Satz 2.

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere abgeschlossene und konvexe Menge und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k \setminus C$ beliebig. Dann existiert ein $\mathbf{x}^* \in C$ und ein $\mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^k$ mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{a}^*)^T \mathbf{x} \leq (\mathbf{a}^*)^T \mathbf{x}^* < (\mathbf{a}^*)^T \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{x} \in C.$$

Bemerkung: Der "Satz von der trennenden Hyperebene" bildet die Grundlage für zahlreiche Beweise in der Linearen Programmierung, wie z.B. Farkas' Lemma, Starke Dualität, ...

Beweis: ...(siehe Tafel.) □

Fixpunktsatz von Kakutani

Kakutani hat 1941 aus dem Brouwer'schen Fixpunktsatz einen allgemeineren Fixpunktsatz abgeleitet:

Satz 3.

Unter den Annahmen

(K1) X ist eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

(K2) $f : X \to 2^X$ ist eine teilmengenwertige Funktion derart, dass

1. die Mengen $f(\mathbf{x})$ nichtleer, kompakt und konvex, und
2. die Mengen $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2m} \mid \mathbf{y} \in f(\mathbf{x})\}$ abgeschlossen sind,

existiert ein Punkt $\mathbf{x}^* \in X$ mit der Eigenschaft $\mathbf{x}^* \in f(\mathbf{x}^*)$.

Beweis: hier ohne Beweis (technisch sehr aufwendig).

Satz 1 folgt als Spezialfall, wenn man wieder $f(\mathbf{a}) := B_1(\mathbf{a}_{-1}) \times \ldots \times B_n(\mathbf{a}_{-n})$ wählt, und zeigt, dass die im Satz 1 geforderten Eigenschaften die Eigenschaften (K1) und (K2) implizieren.

Fixpunktsätze garantieren zwar die Existenz von Gleichgewichten, geben aber keinerlei Anleitung, wie diese berechnet werden können.

Randomisierung von Matrixspielen

Erinnerung: Bei *Matrixspielen* bzw. strategischen Spielen in *Standardform* gehen wir davon aus, dass die Strategiemengen in $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ endlich sind. Sei nun $X_i = \{x_1^i, \ldots, x_{i_m}^i\}$, $i \in N$.

Achtung: Nichttriviale endliche Menge sind nicht konvex! Folglich finden die Fixpunktesätze von Nikaido-Isoda oder Kakutani hier keine Anwendung.

Randomisierte Matrixspiele: Jeder Spieler wählt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi^i = (p_1^i, \ldots, p_{m_i}^i)$ auf seiner Strategiemenge $X_i = \{x_1^i, \ldots, x_{i_m}^i\}$ und zieht dann eine konkrete Strategie, die er schliesslich spielt, gemäss π^i.

Spieler i spielt demnach Strategie $x \in X_i$ mit W'keit $\pi^i(x) = p_j^i$, wenn $x = x_j^i$.

Randomisierte Matrixspiele (Forts.)

Beim Übergang zur randomisierten Version ersetzt somit jeder Spieler i die Menge X_i durch die Menge $\Delta_{m_i} := \{(p_1, \ldots, p_{m_i}) \mid p \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} p_j = 1\}$ aller W'keitsverteilungen auf X_i.

Die Simplizes Δ_{m_i} sind kompakte und konvexe Menge. Folglich ist auch $\Delta := \Delta_{m_1} \times \ldots \times \Delta_{m_n} \subseteq \mathbb{R}^{m_1+\ldots+m_n}$ konvex und kompakt.

Der erwartete Nutzen/Gewinn für Spieler i ist nun

$$U_i(\pi^1, \ldots, \pi^n) = \sum_{x=(x_1,\ldots,x_n)\in X} u_i(x)\pi^1(x_1)\ldots\pi^n(x_n).$$

Beobachtung: Die U_i sind als Summe von Produkten stetiger Funktionen auf Δ stetig, und in jeder Komponente linear (und damit konkav).

Satz von Nash

Der Satz von Nash ist somit eine Folgerung von Satz 1:

Korollar 1.

Das randomisierte Matrixspiel mit den Strategiemenge Δ_{m_i} und den Nutzenfunktionen U_i besitzt ein Gleichgewicht.

Terminologie: Bei randomisierten Spielen heißen die ursprünglichen Strategiemengen X_i oft reine Strategien. Die W'keitsverteilungen $\pi^i \in \Delta_{m_i}$ sind dann gemischte Strategien.

Reine Strategien $x \in X_i$ entsprechen der gemischten Strategie π^i mit $\pi^i(x) = 1$ (und $\pi^i(x') = 0$ für $x \neq x' \in X_i$).

Nullsummen-Spiele

Definition 1.3.

Ein Matrixspiel mit Nutzenfunktionen $\{u_i\}_{i \in N}$ heißt Nullsummenspiel, wenn es eine Zahl u^* gibt, so dass für jedes Profil $\mathbf{x} \in X$ gilt $u_1(\mathbf{x}) + \ldots + u_n(\mathbf{x}) = u^*$.

Bemerkung: Die Terminologie erklärt sich daraus, dass man oBdA $u^* = 0$ annehmen kann. (Ansonsten ersetze u_i durch $\bar{u}_i := u_i - \frac{u^*}{n}$ und erhalte ein im Wesentlichen gleiches Spiel mit $\bar{u}_1(\mathbf{x}) + \ldots + \bar{u}_n(\mathbf{x}) = 0$.)

Im Fall $|N| = 2$ gilt $u_2(\mathbf{x}) = -u_1(\mathbf{x})$, d.h. der eine Spieler gewinnt, was der andere verliert.

Bemerkung: Bei Zwei-Personen-Nullsummen-Matrixspielen genügt es in der Auszahlungsmatrix nur die Komponente des Zeilenspielers anzugeben.

Gleichgewichte bei 2-Personen-Nullsummen-Spielen

Jahre vor Nash hat von Neumann erkannt:

Satz 4.

Randomisierte Nullsummen-Matrixspiele mit zwei Spielern besitzen immer (mindestens) einen Gleichgewichtspunkt.

Wir werden den Satz in einer allgemeineren Form beweisen. Sei dazu Γ ein 2-Personen-Nullsummenmatrixspiel mit Strategiemengen X bzw. Y und Nutzenfunktionen $u_1(x, y) = -u_2(x, y)$ für alle $(x, y) \in X \times Y$.

Bemerkung: Die Funktion $L : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $u_1(x, y) = L(x, y) = -u_2(x, y)$ heißt auch Lagrangefunktion von Γ.

Satz 5.

(x^*, y^*) ist ein Gleichgewicht bzgl. L gdw. für alle $(x, y) \in X \times Y$ gilt

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} L(x, y) = L(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} L(x, y).$$

Beweis: ... Tafel.

Optimierungsprobleme als 2-Personenspiele

Zahlreiche wichtige Aspekte der mathematischen Optimierung lassen sich auch spieltheoretisch interpretieren:

Wir betrachten das folgende allgemeine Optimierungsproblem

$$(P) \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\{f(\mathbf{x}) \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\},$$

wobei $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Die Lagrangefunktion zu (P) ist $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m_+$.

Sei Γ das zugeordnete 2-Personen-Nullsummenspiel, bei dem der erste Spieler durch Wahl einer "Strategie" $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ maximieren möchte, und der zweite Spieler $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ durch Wahl von Lagrange-Multiplikatoren $y_1, \dots, y_m \geq 0$ minimieren möchte (und dadurch den ersten Spieler zum Einhalten der Restriktionen $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ zwingen will).

Übung: Zeigen Sie: Ist $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ Gleichgewicht von Γ, dann ist $\mathbf{x}^*$ eine Optimallösung von (P).

MaxMin-Strategien mittels Linearer Programmierung

Wir kehren nun von 2-Personen-Nullsummenmatrixspielen zu allgemeinen Matrixspielen $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ zurück.

Ein Spieler i, der seinen garantierten Mindestnutzen maximieren möchte, also nach der MaxMin-Strategie spielen will, muss das folgende Optimierungsproblem lösen

$$\max_{x\in X_i} \min_{\mathbf{a}\in X} u_i(\mathbf{a}_{-i}(x)).$$

Beobachtung: Unter dem Gesichtspunkt der MaxMin-Strategie spielt Spieler i im Prinzip ein Nullsummenspiel gegen einen zweiten "Superspieler" mit Strategiemenge $Y = X_{-i}$ und Lagrangefunktion $L(x, y) = u_i(x, y)$.

Satz 6.

Die MaxMin-Strategien eines randomisierten Nullsummenmatrixspiels können mittels Linearer Programmierung ausgerechnet werden.

Beweis: ... Tafel.

Exkurs: Ineffizienz von Gleichgewichten

Das Gefangenen-Dilemma hat gezeigt: Rationales eigennütziges Verhalten kann gesamtgesellschaftlich sehr viel schlechter sein als eine Lösung, die durch eine *zentrale Authorität* vorgegeben wurde.

Zentrale Frage: "Um wieviel kann ein GG schlechter sein als ein "soziales Optimum"?"

Es gibt verschiedene Zielfunktionen um den *sozialen Wert* eines Profils $\mathbf{x} \in X$ zu messen.

Die populärsten sind die "utilitarian function" $\sum_{i \in N} u_i(\mathbf{x})$,und die "egalitarian function" $\max_{i \in N} u_i(\mathbf{x})$.

Bemerkung: Das GG im Gefangenen-Dilemma minimiert keine der beiden Zielfunktionen. Das Beispiel kann so modifiziert werden, dass die GG beliebig ineffizient (d.h. schlecht im Vergleich zum sozialen Optimum) sind.

Preis der Anarchie/Stabilität

Definition 1.4.

Der Preis der Anarchie/Stabilität (kurz: PoA/PoS) ist definiert als das Verhältnis des Wertes einer schlechtesten/besten Gleichgewichtslösung zu einer sozial optimalen Lösung.

Bemerkung: Der PoA und PoS hängt natürlich stark von der gewählten Zielfunktion ab. Wir betrachten (wenn nicht anders genannt) die Zielfunktion $C(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} u_i(\mathbf{x})$.

Beispiel von Pigou: ... Tafel.

Netzwerkspiele

Mithilfe von Netzwerkspielen ("Routing games") werden Situationen modelliert und analysiert, bei denen die Spieler einen gewissen Anteil an "Verkehr" (wie Autos, Bits, Wasserpartikel, etc.) durch ein vorgegebenes Netzwerk schicken. Die Kosten/Verzögerung entlang einer Strecke hängt dabei von der Auslastung/dem Verkehr auf dieser Strecke ab.

Modell:

- Gerichteter Graph $G = (V, E)$ ("Einbahnstraßen"),
- Knotenpaare $\{s_i, t_i\}$ mit Nachfrage $d_i \geq 0$ ("Commodities"),
- Kosten-/Verzögerunsfunktionen $c_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf jeder Kante $e \in E$.

Interpretation: Jeweils d_i Flusseinheiten sollen von s_i nach t_i geschickt werden. Die Kosten c_e um eine Flusseinheit entlang e zu schicken hängen vom Gesamtfluss auf e ab.

Gleichgewichtsmodell von Wardrop

Viele gegenwärtig untersuchte Modelle zur Verkehrsflussanalyse gehen auf das Modell von Wardrop (1952) zurück
(kontinuierliches Verkehrsflussmodell /"Nonatomic selfish routing"):

Sei $\mathcal{P}_i \subseteq \{0,1\}^E$ die Menge aller (Inzidenzvektoren) gerichteter (s_i, t_i)-Pfade in $G = (V, E)$, und $\mathcal{P} = \bigcup_i \mathcal{P}_i$.

Definition 1.5.

Eine Zuordnung $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$ wird Fluss genannt. Ein Fluss f ist zulässig (im Wardrop-Modell), wenn $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = d_i$ für jede Commodity i.

Ist f ein Fluss, dann ist $f_e := \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P$ die Verkehrsmenge unter f auf e, und verursacht eine Verzögerung auf e um $c_e(f_e)$ Zeiteinheiten für jede Flusseinheit, die entlang e geschickt wird.

Insgesamt bewirkt der Fluss f eine Verzögerung von
$C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e$ Zeiteinheiten.

Existenz von Gleichgewichten im Wardrop Modell

Im Modell von Wardrop ist f^* ein Gleichgewicht ("Nash-Fluss"), wenn f^* zulässig ist und unter der induzierten Kostenstructur $c_e^* := c_e(f_e^*)$ kein anderer zulässiger Fluss insgesamt günstiger wäre, d.h. wenn gilt $\sum_{e \in E} c_e^* f_e^* \leq \sum_{e \in E} c_e^* f_e$ für jeden zulässigen Fluss f.

Satz 7.
Sind die Kostenfunktion c_e stetig und monoton wachsend, dann ist im Wardrop-Modell die Existenz eines Gleichgewichts garantiert.

Beweis: ... Tafel.

Bemerkung: Bei affin linearen Kostenfunktionen ist im Wardrop Modell der PoA höchstens $\frac{4}{3}$. D.h. das Beispiel von Pigou ist schon das Schlimmste!

Paradoxon von Braess

Unter der Annahme, dass ein Verkehrsfluss immer zu einem Gleichgewicht hin tendiert, hat Braess 1968 folgendes Phänomen entdeckt:

Es kann durchaus sein, dass eine Senkung der Kosten auf einer Straße die Verkehrsflusskosten insgesamt erhöht!

Paradoxon von Braess: ... Tafel.

Es ist folglich keinesfalls garantiert, dass der Neu- oder Ausbau einer Straße dem Verkehr insgesamt dient!

Diskrete Verkehrsflüsse

Im diskreten Verkehrsflussmodell muss jeder Spieler seinen Bedarf d_i enlang eines ganzzahligen Flusses von s_i nach t_i schicken.

Die Strategiemengen sind somit $X_i = \{f^i : \mathcal{P}_i \to \mathbb{Z}_+ \mid \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f^i_P = d_i\}$ und damit endlich.

Erinnerung: Im (kontinuierlichen) Wardrop-Modell waren die Strategiemengen $X^c_i = \{f^i : \mathcal{P}_i \to \mathbb{R}_+ \mid \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f^i_P = d_i\}$ konvex und kompakt.

Bemerkung: Im "Atomic selfish routing"-Modell muss jeder Spieler i seinen gesamten Bedarf d_i entlang eines einzigen Pfades $P \in \mathcal{P}_i$ schicken.

Gleichgewichte im diskreten Verkehrsflussmodell

Definition 1.6.

Ein diskret zulässiger Fluss f^* ist ein Gleichgewicht (diskreter Nash-Fluss), wenn für alle i und alle Paare $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ mit $f^*_P > 0$ gilt
$\sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} c_e(f^*_e) \leq \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} c_e(f^*_e + 1)$

Satz 8.

Sind die Kantenfunktionen c_e monoton wachsend, dann existiert ein diskreter Nash-Fluss und kann algorithmisch konstruiert werden.

Beweis: ... Tafel.

Rosenthal's Auslastungsspiele

Das diskrete Verkehrsflussmodell ist im Fall $d_i = 1$ ein Spezialfall einer Klasse von Rosenthal untersuchter n-Personenspiele mit endlichen Strategiemengen (Matrixspielen).

Definition 1.7.

Ein Auslastungsspiel ("Congestion Game") ist ein Tupel $(N, R, \{S_i\}_{i\in N}, \{c_r\}_{r\in R})$,bestehend aus einer Spielermenge N, einer endlichen Resourcenmenge R, Strategiemengen $S_i \subseteq 2^{|R|}$ für jedes $i \in N$, und Kostenfunktionen $c_r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

Die Kostenfunktion c_r ist von der Auslastung (Anzahl der r benutzenden Spieler) abhängig, und gibt die entstehenden Kosten/Verzögerung auf Resource r an.

Rosenthal's Auslastungsspiele (Forts.)

In einem Auslastungsspiel $(N, R, \{S_i\}_{i\in N}, \{c_r\}_{r\in R})$ wählt jeder Spieler $i \in N$ eine seiner Strategien $X^{(i)} \in S_i$ (mit Inzidenzvektor $x^{(i)}$). Die Komponente x_r von $x = \sum_{i\in N} x^{(i)}$ gibt dann die Anzahl der Spieler an, die Resource $r \in R$ in ihrer gewählten Strategie hat.
Die Kosten für Spieler i ergeben sich als $C^{(i)}(x) := \sum_{r\in X^{(i)}} c_r(x_r)$.

Theorem 1.8.

Rosenthal's Auslastungsspiele besitzen ein Nash-Gleichgewicht (im üblichen Sinne).

Beweis: ... Tafel.

Beispiel Maschinenbelegungen: ... siehe Tafel.

Fixpunkte bei diskreten Mengen

Sätze vom Kakutani-Typ geben (ausser bei Randomisierung) keine Hilfe, wenn die Strategiemengen $X_1, \ldots, X_n$ der Spieler diskret sind.

Wir betrachten eine Menge X und eine (teilmengenwertige) Funktion $f : X \to 2^X$ und fragen uns, wann die Existenz eines Fixpunkts, d.h. eines $x^* \in X$ mit $x^* \in f(x^*)$ garantiert ist.

Annahmen:

1. Auf X ist eine Halbordnung $P = (X, \leq)$ gegeben.
2. Bzgl. $(X, \leq)$ ist jede (absteigende) Kette $x_0 > x_1 > \ldots$ endlich.

Typische Beispiele: ...siehe Tafel.

Tarski's Fixpunktsats

Sind zwei Halbordnungen $P = (X, \leq_P)$ und $Q = (Y, \leq_Q)$ gegeben, dann erhält man in natürlicher Weise eine Halbordnung $P \times Q = (X \times Y, \leq)$ mit

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x \leq_P x' \text{ und } y \leq_Q y'.$$

Beobachtung: $P \times Q$ besitzt die Eigenschaft (2) gdw. sowohl P als auch Q die Eigenschaft (2) besitzen.

Ein (Ordnungs-)Homomorphismus von $P = (X, \leq)$ ist eine Abbildung $h : X \to X$ mit

$$x \leq y \implies h(x) \leq h(y).$$

Theorem 1.9.

Sei $P = (X, \leq)$ eine Halbordnung mit der Eigenschaft (2) und $h : X \to X$ ein Homomorphismus. Genau dann besitzt h einen Fixpunkt, wenn es ein $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft $h(x_0) \leq x_0$ gibt.

Beweis: ...Tafel.

Kooperative Spiele

Bisher (bei strategischen Spielen): Die Spieler spielen gegeneinander, versuchen ihren persönlichen Nutzen zu maximieren (bzw. ihre Kosten zu minimieren.)

Jetzt (bei kooperativen Spielen): Die Spieler der Menge N können miteinander kooperieren, um den größtmöglichen gemeinsamen Nutzen zu erzeugen.

Zentrale Frage: Welcher Wert soll dem Einzelspieler als fairer anteiliger Gewinn (oder Verlust) zubemessen werden?

Annahmen/Begriffe:

- Wir nehmen $N = \{1, \ldots, n\}$ als endlich an.
- Die Teilmengen $S \subseteq N$ werden Koalitionen genannt.
- Der Wert einer Koalition $S \subseteq N$ wird durch $v(S) \in \mathbb{R}$ ausgedrückt.

Definition kooperativer Spiele

Definition 2.1.

Ein kooperatives Spiel ist ein Tupel $\Gamma = (N, v)$ mit einer endlichen Menge N und einer Funktion $v : 2^N \to \mathbb{R}$.

Die Funktion $v : 2^N \to \mathbb{R}$ wird charakteristische Funktion, oder (je nach Interpretation) Nutzen- oder Kostenfunktion des Spiels $\Gamma = (N, v)$ genannt.

Bemerkung: Wir setzen vorraus, dass $v(S)$ bekannt, oder zumindest explizit berechenbar ist. Außerdem nehmen wir $v(\emptyset) = 0$ an.

Beispiele:

1. Owens Produktionsspiel (. . . siehe Tafel)
2. Auktionsspiel (. . . siehe Tafel)
3. Vernetzungsspiel (. . . siehe Tafel)

Lösungskonzepte

Generell suchen wir nach Allokationen $x \in \mathbb{R}^N$, die den Spielern $i \in N$ eines kooperativen Spiels $\Gamma = (N, v)$ einen "fairen" Wert x_i zuweisen.

Was dabei "fair" heißt, ist nicht von vornherein mathematisch klar gegeben, sondern wird erst definiert (auf verschiedene Weisen).

Ein (mathematisch spezifizierter) Allokationsmodus heißt Lösungskonzept, oder einfach Lösung des Spiels.

Ertrags- und Kostenspiele

Man kann den Wert $v(S)$ einer Koalition $S \subseteq N$ als Ertrag betrachten, den S durch Kooperation erwirtschaften kann, oder aber $v(S)$ könnte die Kosten darstellen, die Koalition S durch Kooperation entstehen.

Bei einem Ertragsspiel $\Gamma = (N, v)$ kann man im Modell davon ausgehen, dass sich Koalition S in kleinere Gruppen aufteilen würde, wenn der Gesamtwert der Koalition dadurch verbessert würde. Wir betrachten dann das Spiel $(N, \tilde{v})$ mit
$\tilde{v}(S) := \max\{\sum_{i=1}^k v(S_i) \mid S_1, \ldots, S_k$ paarw. disjunkte TMen von $S\}$.

Wegen $\emptyset \subseteq S$ gilt $\tilde{v}(S) \geq 0$. Außerdem gelten

- $S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad \tilde{v}(S) \leq \tilde{v}(T)$ (Monotonie)
- $S \cap T = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \tilde{v}(S \cup T) \geq \tilde{v}(S) + \tilde{v}(T)$ (Superadditivität)

Analog betrachten wir bei Kostenspielen (N, c)
$\tilde{c}(S) := \min\{c(S_1) + \ldots c(S_k) \mid S_i$ paarweise disjunkt und $S \subseteq \bigcup_{i=1}^k S_i\}$.

Dann ist für $c \geq 0$ die Funktion $\tilde{c}$ monoton und es gilt

- $S \cap T = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \tilde{c}(S \cup T) \leq \tilde{c}(S) + \tilde{c}(T)$ (Subadditivität)

Der Core

Das Lösungskonzept des Core (engl. Kern) geht auf von Neumann zurück.

Idee: Bei einer vorgeschlagenen Allokation $x \in \mathbb{R}^N$ vergleicht jede Koalition $S \subseteq N$ den ihr zugeteilten Wert $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$ mit ihrem Ertragswert $v(S)$.

In einer fairen Allokation sollte keine Koalition weniger als den von ihr erwirtschafteten Wert zugewiesen bekommen.

Außerdem sollte insgesamt nicht mehr als $v^* = \tilde{v}(N)$ verteilt werden.

$$\text{core}(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v^* \text{ und } x(S) \geq v(S) \forall S \subseteq N\}.$$

Lemma 2.2.

Sei (N, v) ein Ertragsspiel. Dann gilt $\text{core}(\tilde{v}) = \text{core}(v) \cap \mathbb{R}^N_+$.

Beweis: ...siehe Tafel.

Core (Forts.)

Analog definieren wir für Kostenspiele (N, c) den Core als

$$\text{core}(c) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \geq v^* \text{ und } x(S) \leq c(S) \forall S \subseteq N\}$$

Bemerkung: Für die mathematische Analyse ist es nicht relevant, ob wir den Core eines Ertrags- oder Kostenspiels analysieren. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns hier auf das Modell von Ertragsspielen.

Satz von Bondareva

Beobachtung: Der Core eines Spiels ist durch lineare Ungleichungen definiert (siehe Tafel). Der Core kann durchaus leer sein (Übung).

Die folgende Anwendung der Dualität linearer Programme ist in der Spieltheorie als "Satz von Bondareva" bekannt:

Theorem 2.3.

Für ein Ertragsspiel $\Gamma = (N, v)$ ist $\mathrm{core}(v) = \emptyset$ gdw. $\exists y \in \mathbb{R}_+^{2^N}$ mit $\sum_{S \subseteq N} v(S) y_S > v^*$ und $\sum_{S : i \in S} y_S = 1$ für alle $i \in N$.

Beweis: ... siehe Tafel.

Approximativer Core und Auktionen

Im Fall $\mathrm{core}(v) = \emptyset$ kann man zumindest nach einer Allokation x fragen, die die Idee des Cores möglichst gut verwirklicht.

Genauer gesagt fragen wir nach einer Optimallösung des LPs

$$(P) \quad \min\{\sum_{i \in N} x_i \mid x(S) \geq v(S) \text{ für alle } S \subseteq N\}.$$

Beobachtung: Das Problem eine ganzzahlige Lösung des zu (P) dualen LPs zu bestimmen ist gleich dem Problem des Auktionators im Auktionsspiel, den Gesamtwert $v^*(N)$ der zu ersteigernden Objekte zu bestimmen.

Ist x^* eine Optimallösung von (P), so kann x_i^* als "Marktwert" des Objekts $i \in N$ angesehen werden.

Beweis: ... siehe Tafel.

Der Core bei Owens Produktionsspiel

Wir erinnern uns an Owens Produktionsspiel (Tafel). Betrachte für jeden Grundstoff G_i den Wert $b_i := \sum_{p \in N} b_{ip}$ der insgesamt verfügbaren Einheiten an G_i und den Produktionswert $v(N)$, wobei

$$(P') \quad v(N) = \max_{x \geq 0} \{ \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \mid \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \leq b_i \forall i = 1, \ldots, m \}.$$

Sei nun $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ eine Optimallösung des dualen LPs

$$(D') \quad \min_{y \geq 0} \{ \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \mid \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \forall j = 1, \ldots, k \}.$$

Nach starkem Dualitätssatz gilt $v(N) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.

Theorem 2.4.

Ist y^* Optimallösung von (D'), dann ist $z^* \in \mathbb{R}^N$ mit $z_p^* = \sum_{i=1}^{m} b_{ip} y_i^*$ im Core des Produktionsspiels.

Beweis: ...siehe Tafel.

Beispiel: Zuordnungsspiel

Wir gehen von zwei disjunkten Mengen M und N aus.

Definition 2.5.

Eine Zuordnung (fraktionales Matching) ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$ so dass für alle $m \in M$ und $n \in N$ gilt $\sum_{j \in N} x_{mj} \leq 1$ und $\sum_{i \in M} x_{in} \leq 1$.

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}_+^{M \times N}$ mit Koeffizienten a_{ij} definiert nun ein kooperatives Spiel auf der Grundmenge $V = M \times N$ mit Wertefunktion

$$v(S \cup T) := \max\{ \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} a_{ij} x_{ij} \mid x \text{ Zuordnung} \}.$$

Theorem 2.6.

Die Core-Allokationen des Zuordnungsspiels sind **genau** die optimalen Lösungen des LPs
$\min_{y,z \geq 0} \{ \sum_{i \in M} y_i + \sum_{j \in N} z_j \mid y_i + z_j \geq a_{ij} (i \in M, j \in N) \}$.

Beweis: ...siehe Tafel.

Marginale Vektoren

Definition 2.7.

Sei $S \subseteq N$ eine Koalition des kooperativen Spiels (N, v). Dann ist der relative (oder marginale) Wert eines Spielers $p \in S$ bzgl. S gegeben durch $\delta_p(S) := v(S) - v(S \setminus \{p\})$.

Sei $\pi = (p_1, \ldots, p_n)$ eine beliebige, aber feste, Reihenfolge (Permutation) der Menge N. Wir betrachten den zu π gehörenden Marginalvektor x^π mit

$$x^\pi(p_i) = v(\{p_1, \ldots, p_i\}) - v(\{p_1, \ldots, p_{i-1}\}) \quad \forall i \in N.$$

Beobachtung: Für jedes $i \in N$ ist $x^\pi(\{p_1, \ldots, p_i\}) = v(\{p_1, \ldots, p_i\})$. Insbesondere ist $x^\pi(N) = v(N)$.

Konvexität

Der marginale Vektor x^π ist folglich eine Allokation, die $v(N)$ unter den Spielern aufteilt. Allerdings ist x^π typischerweise *nicht* im Core von (N, v).

Definition 2.8.

Ein Ertragsspiel (N, v) heißt π-konvex, wenn der zur Permutation π gehörende marginale Vektor x^π in $\text{core}(v)$ liegt.

Satz 9.

Ein Ertragsspiel (N, v) ist genau dann π-konvex für *jede* Permutation π, wenn v supermodular ist, d.h., wenn $v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ für alle $S, T \subseteq N$.

Beweis: ...siehe Tafel.

Core-Dualität

Völlig analog erhalten wir für Kostenspiele (N, c) mit
$\text{core}(c) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \geq c^* \text{ und } x(S) \leq c(S) \forall S \subseteq N\}$:

Korollar 2.

Genau dann ist das Kostenspiel (N, c) π-konvex für jede Permution π von N, wenn c submodular ist, d.h. wenn $c(S \cap T) + c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ für alle $S, T \subseteq N$.

Übung: Sei (N, v) ein Ertragsspiel mit $\tilde{v}(N) = v(N)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $c : 2^N \to \mathbb{R}$ mit $c(S) := v(N) - v(N \setminus S) \quad \forall S \subseteq N$ die charakteristische Funktion eines Kostenspiels (N, c) mit der Eigenschaft $\text{core}(c) = \text{core}(v)$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass v genau dann supermodular ist, wenn c submodular ist.

Core-Vektoren im Vernetzungsspiel.

Vom rein mathematischen Standpunkt aus macht es also keinen Unterschied, ob wir den Core eines konvexen Spiels als Core eines (supermodularen) Ertragsspiels, oder eines (submodularen) Kostenspiels betrachten.

Theorem 2.9.

Sei (N, c) ein Vernetzungsspiel. Es existiert mindestens eine Permutation π, so dass x^π im Core des Spiels liegt.

Beweis: ...siehe Tafel.

Der Greedy-Algorithmus

Wir betrachten eine Gewichtsfunktion $w : N \to \mathbb{R}$ und ordnen die Elemente in N nach nicht-steigenden Gewichten, d.h. in Reihenfolge $\pi = (p_1, \ldots, p_n)$ so dass $w(p_1) \geq w(p_2) \geq \ldots \geq w(p_n)$.

Wir definieren dazu die Mengen $W_j = W_j^\pi = \{p_1, \ldots, p_j\}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Für vorgegebene Werte $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$(P) \quad \min\{\sum_{p \in N} w(p)x(p) \mid x(W_j) \geq v_j \forall j = 1, \ldots, n\}.$$

Der Greedy-Algorithmus konstruiert eine Lösung $x^\pi \in \mathbb{R}^N$ via

$$x^\pi(p_1) = v_1 \quad \text{und} \quad x^\pi(p_i) = v_i - v_{i-1} \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Theorem 2.10.

Der Greedy-Vektor löst das Problem (P) optimal.

Beweis: …siehe Tafel.

Der Core konvexer Spiele

Sei (N, v) ein konvexes (d.h. supermodulares) Ertragsspiel und $w : N \to \mathbb{R}_+$ eine beliebige Gewichtsfunktion.

Wir wählen die Reihenfolge π wie im Greedy-Algorithmus nach nicht-wachsenden Gewichten und setzen $v_j := v(W_j)$ für alle $j \in N$.

Der Greedy-Vektor ist identisch mit dem entsprechenden Marginalvektor und liegt folglich im Core von (N, v) (wegen Supermodularität von v). Andrerseits erfüllt jede Core-Allokation x per Definition insbesondere $x(W_j) \geq v(W_j) = v_j$.

Somit folgt aus Theorem **??**, dass x^π auch das Problem $\min\{w^T x \mid x \in \text{core}(v)\}$ löst.

Algorithmische Charakterisierung konvexer Spiele

Theorem 2.11.

Ein kooperatives Ertragsspiel (N, v) ist genau dann konvex, wenn der Greedy-Algorithmus garantiert bei jeder Gewichtung $w : N \to \mathbb{R}_+$ das Optimierungsproblem $\min\{w^T x \mid x \in \text{core}(v)\}$ löst.

Beweis: ...siehe Tafel.

Theorem 2.12.

Sei (N, v) ein konvexes Ertragsspiel. Dann ist core(v) genau die konvexe Hülle aller Marginalvektoren x^π.

Beweis: ...siehe Tafel.