Technische Universität Berlin **WS 2013/2014**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–1, Frau Klink

Dr. Sebastian Stiller
Dr. Max Klimm
Jan-Philipp Kappmeier
Georg Loho

Katharina Bütow, Christian Döblin, Alexander Hopp, Judith Kubitza, Daniel Kuske, Antje Lehmann, Steffen Przybylowicz, Olivia Röhrig, Robert Rudow, Daniel Schmand, Hendrik Schrezenmaier, Judith Simon, Sebastian Spies, Jan Zur

10. Übungsblatt Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: 15.1.2014 (bis 14:15 Uhr in MA001)

1. Aufgabe $(2 + 1 + 4 + 3$ Punkte)

Ein Schiebepuzzle[1], wird auf einem quadratischem Gitter der Größe $k \times k$ gespielt. Eines der k^2 Felder bleibt leer, alle anderen Felder enthalten die Zahlen von $1, \dots, k^2 - 1$. Die Aufgabe besteht darin, die Zahlenfelder im Puzzle in die richtige Reihenfolge zu bringen, dass heißt in der ersten Zeile stehen von links nach rechts die Zahlen $1, \dots, k$, in der zweiten die Zahlen $k + 1, \dots, 2k$, usw. Das leere Feld wird benutzt, um die Zahlen zu verschieben.

Wir bezeichnen das Feld in der $i$ten Zeile und der $j$ten Spalte eines $k \times k$-Puzzles mit F_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Eine Belegung aller Felder F_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit den Zahlen $1, \dots, k^2 - 1$ (und $\emptyset$ für das leere Feld) nennen wir *Zustand*. Die Zeilennummer des leeren Feldes für Zustand Z bezeichnen wir mit L_Z. Zwei Zustände Y und Z heißen *benachbart*, wenn sich beide Zustände durch genau einen Spielzug (genau einmaliges Verschieben einer Zahl auf des leere Feld) ineinander überführen lassen. Ein Zustand Z heißt von dem gegenwärtigen Zustand Y aus *erreichbar*, wenn Y durch Verschieben des leeren Feldes in Z überführt werden kann (mehrmaliges Verschieben sowie gar kein Verschieben erlaubt). Der ungerichtete Graph $G^k = (V, E)$, bei dem die Knotenmenge V die Menge aller Zustände ist und $E := \{\{Y, Z\} : Y \text{ und } Z \text{ benachbart}\}$, heißt *Zustandsgraph*.

Ein Feld F_{pq} heißt *lexikographisch kleiner* als ein Feld F_{rs}, falls entweder $p < r$ oder $p = r$ und $q < s$. Seien F_{pq} und F_{rs} zwei nichtleere Felder mit Ziffern w_{pq} und w_{rs}. Wir sprechen von einem *Fehlstand*, wenn F_{pq} lexikographisch kleiner als F_{rs} ist, aber $w_{pq} > w_{rs}$. Die Anzahl der Fehlstände eines Zustands Z bezeichnen wir mit N_Z.

1	2	3
4	5	6
7	8	

5	2	3
4	1	6
	8	7

Der Zustand des linken Bildes hat keinen Fehlstand, während der Zustand des rechten Bildes 8 Fehlstände hat. Stellen wir die Fehlstände als Zahlenpaare dar, so sind es die folgenden: $(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (8, 7)$.

[1] `http://www.denksport.de/braingames/schiebepuzzle/`

(a) Zeichnet den Zustandsgraphen G^2.

(b) Wieviele verschiedene Zustände gibt es für ein $k \times k$-Spiel?

(c) Seien Y und Z zwei benachbarte Zustände eines $k \times k$-Spiels. Beweist die folgende Invariante:
$$(N_Y + N_Z + (k+1)(L_Y + L_Z)) \mod 2 = 0.$$

(d) Beweist oder widerlegt: Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 2$ und jedem Zustand Y des Schiebepuzzles der Größe $k \times k$, gibt es einen Zustand Z, der von Y aus nicht erreichbar ist.

2. Aufgabe (2 + 3 Punkte)

Sei G ein gerichteter Graph.

(a) Zeigt, dass jede Kante in G entweder zu einem gerichteten Kreis, oder einem gerichteten Schnitt gehört.

(b) Zeigt, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

  (1) G ist stark zusammenhängend.

  (2) G enthält keinen gerichteten Schnitt.

  (3) G ist zusammenhängend und jede Kante in G liegt auf einem gerichteten Kreis.

Hinweis: Das Lemma von Minty aus der Vorlesung kann benutzt werden.