6.3 Kürzeste-Wege-Suche in Graphen

→ siehe Folien (von Herrn Möhring)

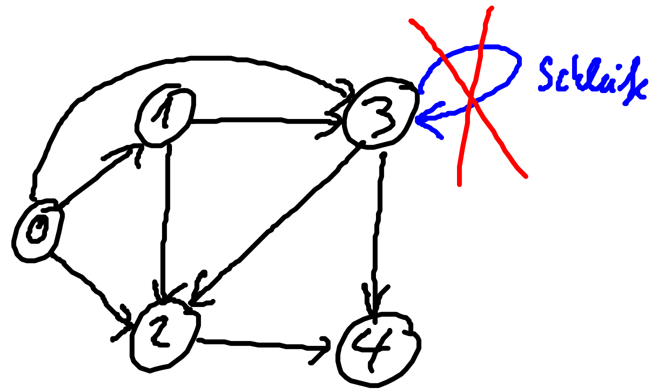
Sei $G=(V,E)$ Digraph, d.h.

V Knotenmenge

$V=\{0,1,2,3,4\}$

E Bogenmenge (Kantenmenge)

$E \subseteq V\times V - \{(v,v) \mid v\in V\}$



Wege in Digraphen:

Kantenfolge $e_0, e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ $\quad e_i=(v_i,w_i) \quad v_i,w_i\in V$

mit $w_i = v_{i+1}$ für $i=0,1,\dots,k-1$

Kantenbewertung $w: E\to\mathbb{R}$

Länge von Weg $W=(e_0,e_1,e_2,\dots,e_k)$ ist dann $\sum_{i=0}^{k} w(e_i)$

Beweis der Bellmann-Ungleichung:

Es sei $A=(a_{ij})$ Entfernungsmatrix

d.h.

$$a_{ij}=\begin{cases} w(i,j) & \text{falls } (i,j)\in E \\ 0 & \text{falls } i=j \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $i,j \in V$, $m \geq 1$

$$u_{ij}^{(m)} := \begin{cases} \text{Länge eines kürzesten } i\text{-}j\text{-Weges mit höchstens} \\ m \text{ Kanten (falls existiert)} \\ \infty \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

Bellmann-Gleichung:

$$u_{ij}^{(1)} = a_{ij} \quad \leftarrow \text{klar nach Def.}$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \min_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right\} \quad \text{für } m \geq 1$$