RBs: 11.

Voraussichtlich:

RBs: 11.-15.2. ⇒ Listen im Sekr. MA504

Voraussichtlich: Tausch von Übungen und Vorlesungen in den kommenden Wochen.

Erinnerung: Eine rekursive Funktion wird durch sich selbst definiert

Bsp: Fakultät $n!$ wird definiert über

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{falls } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Beispiele rekursiver Funktionen mit
- extremem Speicherplatzbedarf
- Terminierung nicht garantiert

Ackermann-Funktion: Für $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei

$$a(m,n) := \begin{cases} n+1, & m = 0 \\ a(m-1,1), & m > 0, n = 0 \\ a(m-1, a(m,n-1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

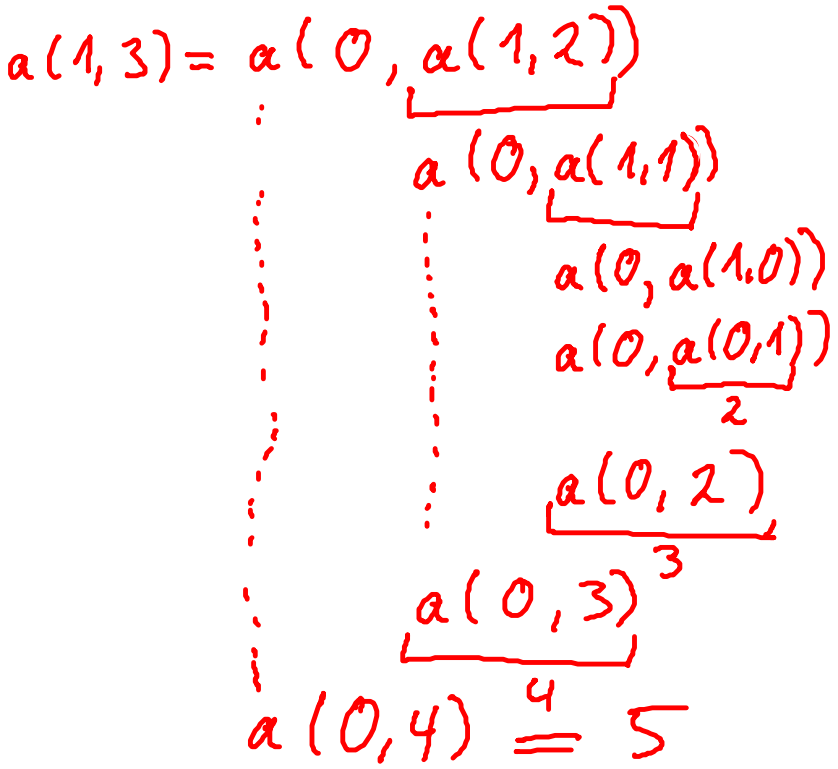
Theorie der Berechenbarkeit: Ackermann-Funktion wächst stärker als jede primitive rekursive Funktion!

Java-Implementation:

```
int a(int m, int n) { // m, n ≥ 0
```

```
    if (m == 0) return n+1;
    if (n == 0) return a(m-1, 1);
    return a(m-1, a(m, n-1));
}
```

Bsp. Berechnung von $a(1,3)$ „per Hand":



Rekursionstiefe wird zu groß,
Laufzeitstack läuft über!

Satz: Aufruf $a(m,n)$ terminiert für alle $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Zwei ineinander geschachtelte

Induktionen:

- äußere Induktion nach m
- innere Induktion nach n bei festem m

Ind. Anf. $m = 0 \Rightarrow a(0, n) = n+1 \Rightarrow$ nur ein Aufruf $\Rightarrow$ Terminierung

Ind. Vor.: Terminierung für alle $0 \leq k < m$ und für alle n (*)

Schluss auf m:

Ind. Anfang: $n = 0$

$a(m, 0) \underset{\text{Def.}}{=} a(m-1, 1)$ terminiert nach (*)

Ind. Vor.: $a(m, l)$ terminiert für alle $0 \leq l < n$ (**)

Schluss auf n:

$a(m, n) \underset{\text{Def}}{=} a(m-1, \underbrace{a(m, n-1)}_{\text{terminiert wegen (**), ergibt } r})$

$= \underbrace{a(m-1, r)}_{\text{terminiert wegen (*)}}$

□

□

Folgerung: Ackermann-Funktion terminiert zwar immer, die Rekursionstiefe wird aber schnell extrem groß. Berechnung scheitert dann in der Praxis.

Ulam-Funktion erzeugt ausgehend vom Startwert $a_0 \in \mathbb{N}$ eine Folge

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n/2 & \text{falls } a_n \text{ gerade} \\ 3 \cdot a_n + 1 & \text{falls } a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Folge endet, sobald $a_n = 1$ für ein n.

Beispiel:

$a_0 = 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

Offenes Problem, ob die Folge für jede Eingabe abbricht (terminiert),
d.h. ob die Länge der Folge immer endlich ist.

Rekursive Java-Methode zur Berechnung da Länge:

```
long ulamLength(long n){
    if (n == 1) return 0;
    if (n%2 == 0) return (ulamLength(n/2)+1);
    return (ulamLength(3*n+1)+1;
}
```

basiert auf rek. Def. der Länge $l(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n=1 \\ 1+l(n/2) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1+l(3n+1) & \text{sonst} \end{cases}$

Tipp: erst mathem. Rekursionsformel überlegen, und dann diese 1-1 in Java Methode übersetzen.

Wann sollte man Rekursion wählen bzw. vermeiden?

- hängt von Größe / Tiefe des Rekursionsbaums ab!
- iterative Methoden meist besser, falls offensichtlich existieren.

---

§9. Mehr zu Klassen:

Vererbung, Interfaces, Modifizierer, Packages, Klassen in Klassen

Vererbung

neu: eine bestehende Klasse erweitern

Beispiel: Quadrate und Rechtecke

```
public class Square {

    protected double width;

    public Square() { // default constructor
        this.width = 1;
    }

    public Square(double width) {
        this.width = width;
    }

    public double area() {
        return this.width * this.width;
    }
}
```

≙ Einheitsquadrat

Klasse „Rectangle" erweitert Klasse „Square":

```java
public class Rectangle extends Square {

    private double height;

    public Rectangle() { // default constructor
        this.height = 1; // calls super() implicitly!
    } super(); überflüssig, macht Compiler automatisch

    public Rectangle(double width, double height) {
        super(width);  // calls Square(width)
        this.height = height;
    }

    public double area() { // overwrite area() of class Square
        return this.width * this.height;
    }
}
```

- Klasse Rectangle ist Unterklasse / Tochterklasse / Subklasse
- Klasse Square ist Oberklasse / Mutterklasse / Vaterklasse

- Klasse Rectangle „erbt" von Klasse Square.
- Tochterklassen haben einiges zusätzlich, was die Mutterklasse nicht besitzt, z.B. height
- Square besitzt bereits Methode area(), diese wird im Rectangle überschrieben.

- Tochterklasse „erbt", d.h. sie hat Zugriff auf alle nicht privaten Felder und Methoden der Mutterklasse (bis auf Konstruktoren)

- Tochterklasse darf Methoden und Felder der Mutterklasse neu definieren (überschreiben)
  z.B. area()

- Tochterklasse darf zusätzliche Methoden und Felder einführen.
- Zugriff auf Felder und Methoden der Mutterklasse geschieht mit Referenz super.
- super.super geht nicht!

Besondere Regeln für Konstruktoren:

Konstruktoren

- werden nicht mit vererbt
- Konstruktor der Sohnklasse muss einen Konstruktor der Vaterklasse aufrufen, dies geschieht mit
  - explizitem Aufruf super(…) oder
  - implizitem Aufruf von super(), d.h. Defaultkonstruktor der Vaterklasse wird aufgerufen
  - => Compilerfehler, wenn Vaterklasse keinen Defaultkonstruktor hat
- Aufruf von Konstruktor der Oberklasse muss erste Anweisung im Konstruktor der Sohnklasse sein

Die Ur-Ur-Ur-...-Oma aller Klassen ist Objekt

- Klasse Object ist der Ur-Ur-…-Großvater aller Klassen
- Object ist default Oberklasse jeder Klasse
  public class MyClass {…} ist dasselbe wie
  public class MyClass extends Object {…}
- Klasse Object hat die Methode public String toString()
  Damit hat auch jede Unterklasse diese Methode, sie muss aber i.A. überschrieben werden
- Mehrfachvererbung ist in Java nicht möglich, eine Klasse erbt immer nur von einer Klasse

↑ Daher bildet die Klassenhierarchie einen Baum.

```java
public class Test {

    public static void main (String[] args) {
        Square[] vec = new Square[10];

        // initialize this array with squares and rectangles
        for (int i = 0; i < vec.length; i++) {
            if (i % 2 == 0) vec[i] = new Square(i);
            else vec[i] = new Rectangle(i, i+1);
        }

        // write type and area to console
        for (int i = 0; i < vec.length; i++) {
            System.out.println("i = " + i +": "
                + vec[i].getClass().getName()
                + " mit Flaeche "
                + vec[i].area());
        }
    }
}
```

funktioniert, da jedes Rectangle auch ein Square ist

Klassenname

Jedes Objekt vec[i] kennt seine Klasse und ruft zugehörige area()-Methode auf.

sehr komfortabel für Datenstrukturen, die Objekte verschiedener Klassen einer Hierarchie verwalten.

Beispiel 2:

Abstrakte Klasse für Uni-Angestellte.

Jeder Angestellte hat Eigenschaften, die er/sie mit allen anderen teilt, aber auch spezif. Eigenschaft.

in Mutterklasse

in verschiedene Tochterklassen

```java
public abstract class Employee {
    // abstract class (since there is at least one abstract method)
    // abstract classes cannot have objects

    private String name;

    protected double salary;
    /* protected is almost like private, except that classes derived fro
     * class have access to protected variables and methods */

    public Employee() {
        // default constructor, doesn't do anything
        // still useful since we want to derive classes from this class
    }

    public Employee(String name) {
        this.name = name;
    }

    protected double getSalary() { // protected since salary is confider
        return this.salary;
    }

    public String getName() {
        return this.name;
    }

    public abstract void doWork();
    // no definition, only declaration and therefore abstract
    // implementation depends on type of employee
}
```

abstrakte Klasse, d.h. keine Objekte dieser Klasse, nur Nachfahren.

abstrakte Methode, hat keinen Rumpf, nur Deklaration → Bauanleitung für Tochterklassen.

Zwei konkrete Tochterklassen.

```java
public class Lecturer extends Employee {

    public Lecturer() {
        // calls default constructor of superclass Employee implicitly
    }

    public Lecturer(String name) {
        super(name); // calls Employee(name)
    }

    public void doWork() { // overwrites doWork() in Employee
        System.out.println("Halte die Vorlesung");
    }
}
```

```java
public class TA extends Employee {

    public TA() {
        // calls default constructor of superclass Employee implicitly
    }

    public TA(String name) {
        super(name); // calls Employee(name)
    }

    public void doWork() { // overwrites doWork() in Employee
        System.out.println("Erstelle Übungszettel");
    }

    public double getSalary() {  // more public that in Employee
        return this.salary;      // more private is not possible
    }
}
```

Verwendung dieser Klassen:

```java
public class Test {

    public static void main (String[] args) {
        Lecturer peis = new Lecturer("Peis");
        TA martin = new TA("Gross");
        doSomething(peis);
        doSomething(martin);
    }

    static void doSomething(Employee e) {
        // ...
        e.doWork();
    }
}
```

Output:
Halte die Vorlesung
Erstelle Übungszettel

- Überall, wo Mutterklasse stehen kann, kann auch Tochterklasse stehen
- Alles, was man mit Objekt vom Typ Employee machen kann, kann man auch mit Lecturer oder TA machen.

- Referenz martin zeigt auf Objekt vom Typ TA, die Methode doSomething(Employee e) ist zwar allg. für Employee definiert, aber beim Aufruf für martin wird doWork() der Klasse TA aufgerufen.