→ Folien

<u>Ankündigung</u>: Madeleines Sprechstunde:
morgen (Mi) von 12 - 14 Uhr (statt Do)

<u>Satz</u>: Die folgenden 3 Aussagen sind äquivalent:

(i) G enthält negativen Zykel

(ii) G enthält elem. " "

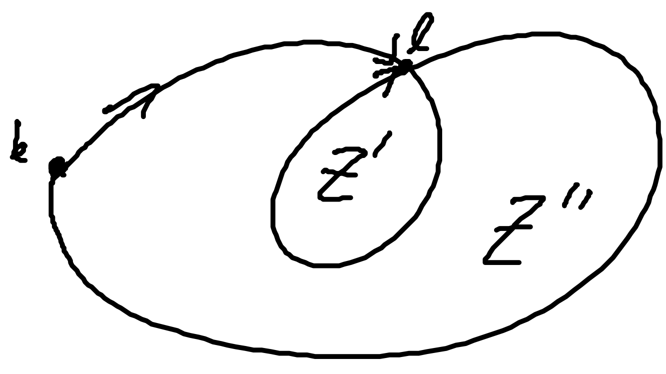
(iii) $\exists i \in V: u_{ii}^{(n)} < 0$

<u>Beweis</u>: Beweis durch Ringschluss (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i)

<u>(i) ⇒ (ii)</u>: Sei Z negativer Zykel

Z elementar ⇒ fertig

Also Z nicht elementar: Laufe von einem beliebigen Knoten k los solange bis ein Knoten l zum 2. Mal besucht wird.



→ Z zerfällt in einen elementaren Zykel Z', der zwischen den zwei Besuchen von l liegt, und den Rest Z''.

Dann ist Z'' selbst wieder ein Zykel und es gilt:

$$\text{Länge}(Z) = \text{Länge}(Z') + \text{Länge}(Z'') < 0$$

Falls Länge$(Z') < 0$ $\rightarrow$ fertig

Sonst weiter so mit Z'', dessen Länge$(Z'') < 0$ ist.

Da G endlich ist, findet man nach endlich vielen Iterationen einen negativen elementaren Zykel.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Sei Z negativer elementarer Zykel $\Rightarrow$ Z enthält $m \leq n$ Kanten

$\Rightarrow u_{ii}^{(m)} \leq$ Länge(Z) für einen Knoten i aus Z

< 0

$\Rightarrow u_{ii}^{(n)} \leq u_{ii}^{(m)} < 0$

nach Monotonie-Lemma

(iii) $\Rightarrow$ (i): $u_{ii}^{(n)} < 0 \Rightarrow \exists$ i-i-Weg (Zykel) mit negativer Länge.

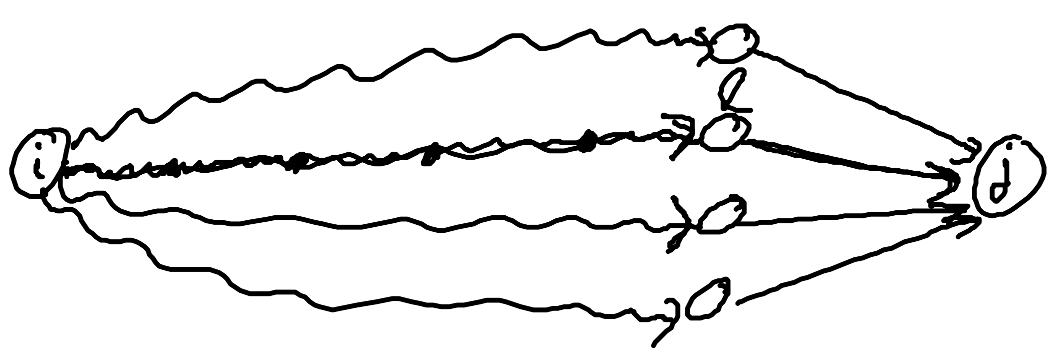
$\square$

Bislang: nur kürzeste Wegelängen berechnet.

Jetzt: berechne zugehörige kürzeste Wege.

Idee: $$u_{ij}^{(m+1)} = \min_{k \in V} \{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \}$$

Das Minimum wird für ein $k = l \in V$ angenommen



$\rightarrow$ l ist letzter Knoten vor j auf dem kürzesten i-j-Weg mit $\leq m+1$ Kanten.

Nutze diese Einsicht iterativ, um ausgehend von j rückwärts den kürzesten i-j-Weg zu finden.