Test am 12.12.12 im Audimax
beginnt pünktlich um 14:15.

Mitbringen: Studi-Ausweis
Stift (kein Rot- oder Bleistift)

OA 6 → wichtig für Test (alle anderen OAs, PAs + HAs natürlich auch!)

Am 11.12. Übung statt VL

1. Semesterhälfte endet mit 6. Aufgabensatz

CoMa-Umtrunk am Mi, 19.12. ab 18 Uhr im A-Café

Satz (Bellmann Gleichungen):

Die $u_{ij}^{(m)}$ erfüllen die Rekursionsgleichungen ("Bellmann-G.")

klar, nach Def.

$$u_{ij}^{(1)} = a_{ij} := \begin{cases} w(i,j) & \text{falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{falls } i = j \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \min_{k \in V} \{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \} \quad \text{für } m \geq 1$$

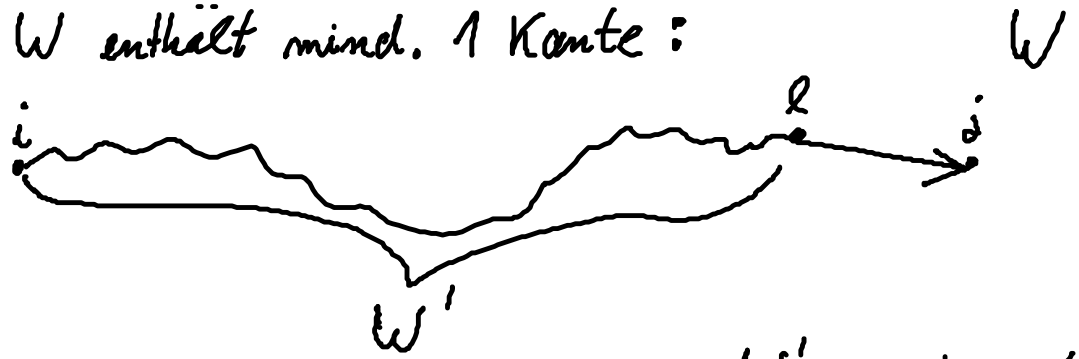
Zeige dies in zwei Schritten: „$\geq$", dann „$\leq$"

„$\geq$": Wir zeigen $\boxed{u_{ij}^{(m+1)} \geq \min_{k \in V} \{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \}}$

Falls $u_{ij}^{(m+1)} = \infty$ ✓

Falls $u_{ij}^{(m+1)} < \infty$, so betrachte kürzesten i-j-Weg W mit höchstens m+1 Kanten.

1. Fall: W enthält mind. 1 Kante:



Dann zerfällt W in einen Weg W' von i nach l mit höchstens m Kanten, plus der Kante (l,j).

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(m+1)} &= \text{Länge von } W \\ &= \text{Länge von } W' + a_{lj} \\ &\geq u_{il}^{(m)} + a_{lj} \geq \min_{k\in V} \{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \} \end{aligned}$$

2. Fall: W enthält keine Kante $\Longrightarrow i=j$

$$0 = u_{ii}^{(m+1)} \leq u_{ii}^{(m)} \leq u_{ii}^{(m-1)} \dots \leq u_{ii}^{(1)} = a_{ii} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Def.}}}{=} 0 \quad \text{(nach Monotonie-Lemma)}$$

$$\Longrightarrow u_{ii}^{(m)} = 0$$

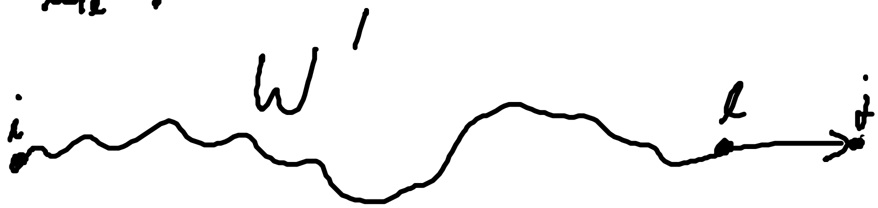
$$\Longrightarrow u_{ij}^{(m+1)} = \underset{\substack{\| \\ 0}}{u_{ii}^{(m+1)}} = \underset{\substack{\| \\ 0}}{u_{ii}^{(m)}} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{a_{ii}} \geq \min_{k\in V} \{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \} \quad \checkmark$$

„$\leq$": Zeigen jetzt $\boxed{u_{ij}^{(m+1)} \leq \min_{k\in V} \{ u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \}}$

Falls $\min_{k\in V} \{ \dots \} = \infty$ $\checkmark$

Ansonsten wird das Minimum für ein $k = l \in V$ angenommen mit $u_{il}^{(m)} < \infty$ und $a_{lj} < \infty$.

Es sei W' ein kürzester Weg von i nach l mit $\le m$ Kanten der Länge $\mu_{il}^{(m)}$:



Falls $l = j$, dann $\mu_{ij}^{(m+1)} \le \mu_{ij}^{(m)} + \underbrace{a_{jj}}_{=0}$

$$= \mu_{il}^{(m)} + a_{lj} = \min_{k \in V} \{ \dots \}$$

Falls $l \neq j$:
Betrachte Weg W, der durch Anhängen der Kante (l,j) an W' entsteht.
W enthält höchstens $m+1$ Kanten.

$\Rightarrow \mu_{ij}^{(m+1)} \le$ Länge von W

$$= \mu_{il}^{(m)} + a_{lj} = \min_{k \in V} \{ \mu_{ik}^{(m)} + a_{kj} \}$$

$\square$

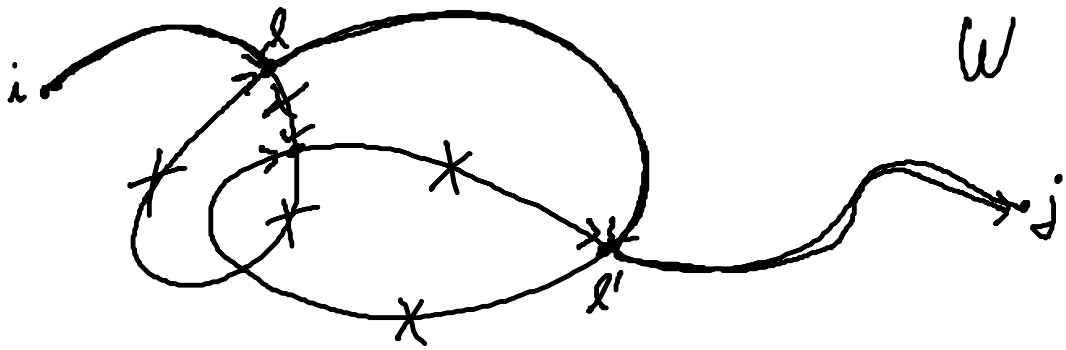
Nutze jetzt Bellmann-Gleichungen zur Berechnung kürzester Wege.
$\longrightarrow$ Folien

<u>Lemma:</u> Enthält G keinen negativen Zykel und gibt es einen Weg von i nach j in G, dann gibt es einen kürzesten Weg von i nach j, der elementar ist.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten zunächst einen beliebigen Weg W von i nach j in G und konstruieren einen elementaren i-j-Weg W' mit

Länge von W' $\le$ Länge von W

⇒ Man kann sich bei der Suche nach kürzesten Wegen auf elementare Wege beschränken (da keine neg. Zykel nach Voraussetzung).
Daraus folgt dann sofort die Behauptung des Lemmas, da es nur endlich viele elementare Wege gibt.



Betrachte Knoten l, der mehrfach besucht wird und lösche aus W den Teilweg zwischen dem ersten und zweiten Besuch von l.
Dieser Teilweg hat nach Annahme eine nicht-negative Länge, d.h. W hat sich dabei nicht verlängert.
Wende diese Lösch-Operation sukzessive an, bis W elementar ist.
(Da W endlich ist, benötigt man nur endlich viele Operationen.)

⊠

Weiter mit Folien ...