Nichtdet. TM : δ Relation

Komplexitätsklasse NP: Sprachen, die von NTM in polynomieller Zeit entschieden werden können.

<u>Def:</u> polyn. Reduzierbarkeit: $L_1 \leq_p L_2$

$:\Longleftrightarrow \exists f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ polyn. berechenbar

$$\forall w \in \Sigma_1^* : \; w \in L_1 \Longleftrightarrow f(w) \in L_2$$

Satz: $L_1 \leq_p L_2$, $L_2 \in P \Rightarrow L_1 \in P$

Lemma: $L_1 \leq_p L_2$, $L_2 \leq_p L_3 \Rightarrow L_1 \leq_p L_3$

Def: Eine Sprache L heißt <u>NP-schwer</u>, falls $L' \leq_p L$ $\forall L' \in NP$.
Eine NP-schwere Sprache L heißt <u>NP-vollständig</u>, falls $L \in NP$.

Satz: Es sei L NP-vollständig
i) Falls $L \in P$, so ist $P = NP$.
ii) Falls $L \notin P$, so ist $L' \notin P$ für alle NP-vollst. Sprachen L'. $\square$

Satisfiability Problem (SAT)

Gegeben: Boolsche Variablen $x_1, \dots, x_n$ und m Klauseln, d.h. Disjunktionen von Literalen x_i und $\overline{x_i} := \neg x_i$, $i = 1, \dots, n$

Frage: Gibt es eine Belegung der Variablen, so dass alle m Klauseln erfüllt sind.

Beispiel: $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$

$\wedge (x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \qquad (n=5, m=4)$

<u>Satz von Cook:</u> SAT ist NP-vollständig.

<u>Beweis:</u> SAT $\in$ NP: NTM „rät" erfüllende Belegung von $x_1, \dots, x_n$ und überprüft diese.

Es sei nun $L \in NP$, z.zg.: $L \leq_p$ SAT!

Zu L gibt es eine NTM N, die L mit worst-case Rechenzeit $p(n)$ entscheidet (p Polynomfkt.).

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_e\}$, $F = \{q_0\}$, q_1 Anfangszust.

$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$

Zu geg. $x \in \Sigma^*$ konstruiere Instanz von SAT $f(x)$, so dass

$$\boxed{N \text{ akz. } x :\Longleftrightarrow x \in L \Longleftrightarrow f(x) \in SAT}$$

<u>Zeige:</u> f kann so konstruiert werden und zwar in polyn. Zeit.

$f(x)$ enthält 8 Arten von Klauseln über den folgenden Boolschen Variablen:

$\mathsf{band}_{i,j,t}$ bedeutet „die i-te Stelle des Bandes enthält zur Zeit t das Symbol σ_j",

$\mathsf{cursor}_{i,t}$ bedeutet „der Cursor zeigt zur Zeit t auf die i-te Stelle des Bands“,

$\mathsf{zust}_{k,t}$ bedeutet „N ist zur Zeit t im Zustand q_k“,

$\mathsf{wahl}_{r,t}$ bedeutet „N wählt zur Zeit t die r-te Alternative aus Δ für den nächsten Schritt aus“,

mit $0 \le i \le p(|x|)$, $1 \le j \le s$, $0 \le k \le \ell$,
$0 \le t \le p(|x|)$, $1 \le r \le |Q| \cdot |\Sigma| \cdot 3$

Verwende die folgende Schreibweise für Boolsche Variablen $P_1, \ldots, P_a$:

$\exists!\, i : P_i$ bedeutet

$$\left(\bigvee_i P_i\right) \wedge \bigwedge_{i<j} \left(\overline{P_i} \vee \overline{P_j}\right)$$

Θ_1: Zu jeder Zeit t zeigt der Cursor von N auf genau eine Stelle des Bands:

$$\bigwedge_t \exists! i : \mathsf{cursor}_{i,t}$$

Θ_2: Zu jeder Zeit steht an jeder Stelle des Bands genau ein Zeichen:

$$\bigwedge_{i,t} \exists! j : \mathsf{band}_{i,j,t}$$

Θ_3: Zu jeder Zeit ist N in genau einem Zustand:

$$\bigwedge_t \exists! k : \mathsf{zust}_{k,t}$$

Θ_4: Zu jeder Zeit wählt N genau eine der sich bietenden Möglichkeiten für den nächsten Schritt aus:

$$\bigwedge_t \exists! r : \mathsf{wahl}_{r,t}$$

Θ_5: Zur Zeit 0 steht auf dem Band $\triangleright x \epsilon = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\ldots\sigma_{j_{n+1}}\sigma_{j_{n+2}}\ldots\sigma_{j_{p(n)}}$. Der Anfangszustand ist $s = q_1$:

$$\mathsf{zust}_{1,0} \wedge \mathsf{cursor}_{0,0} \wedge \bigwedge_i \mathsf{band}_{i,j_i,0}$$

Θ_6: Spätestens zur Zeit $p(n)$ ist N im Zustand 'yes' $= q_0$:

$$\bigvee_t \mathsf{zust}_{0,t}$$

Θ_7: Zu jeder Zeit kann nur das Symbol geändert werden, das an der Stelle steht, auf die der Cursor gerade zeigt:

$$\bigwedge_{i,j,t}\Big((\mathsf{cursor}_{i,t} \vee \mathsf{band}_{i,j,t} \vee \neg\mathsf{band}_{i,j,t+1}) \wedge (\mathsf{cursor}_{i,t} \vee \neg\mathsf{band}_{i,j,t} \vee \mathsf{band}_{i,j,t+1})\Big)$$

(Beachte, dass $\neg X \Rightarrow (Y \Leftrightarrow Z)$ äquivalent ist zu $(X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$.)

Θ_8: Zu jeder Zeit t folgt der nächste Schritt der Maschine einer Regel aus der Relation δ (ein gegebenes Paar $(q_k, \sigma_j) \in Q \times \Sigma$ eröffne die Möglichkeiten $((q_k, \sigma_j), (q_{k_r}, \sigma_{j_r}, D_r)) \in \delta$, $r = 1, \ldots, R$):

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i,j,k,r,t}\Big(\ &(\neg\mathsf{zust}_{k,t} \vee \neg\mathsf{cursor}_{i,t} \vee \neg\mathsf{band}_{i,j,t} \vee \neg\mathsf{wahl}_{r,t} \vee \mathsf{zust}_{k_r,t+1}) \wedge \\ &(\neg\mathsf{zust}_{k,t} \vee \neg\mathsf{cursor}_{i,t} \vee \neg\mathsf{band}_{i,j,t} \vee \neg\mathsf{wahl}_{r,t} \vee \mathsf{band}_{i,j_r,t+1}) \wedge \\ &(\neg\mathsf{zust}_{k,t} \vee \neg\mathsf{cursor}_{i,t} \vee \neg\mathsf{band}_{i,j,t} \vee \neg\mathsf{wahl}_{r,t} \vee \mathsf{cursor}_{i+\delta_r,t+1})\ \Big)\end{aligned}$$

wobei

$$\delta_r := \begin{cases} 1 & \text{falls } D_r = \rightarrow, \\ 0 & \text{falls } D_r = -, \\ -1 & \text{falls } D_r = \leftarrow. \end{cases}$$

(Beachte, dass $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \Rightarrow B$ äquivalent ist zu $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \vee \neg A_4 \vee B$.)

Man kann sich davon überzeugen, dass es genau dann eine Belegung der Variablen gibt, die alle Klauseln erfüllt, wenn N mit Eingabe x in einen akzept. Endzustand gelangen kann. □

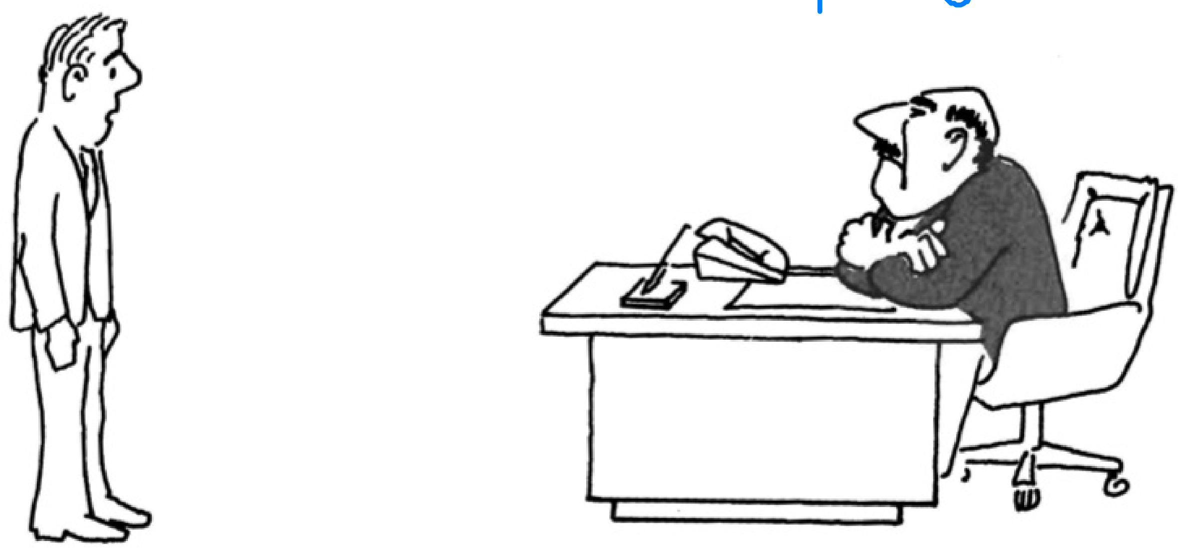
<u>Lemma:</u> Ist $L_2 \in NP$ und L_1 NP-vollst. und $L_1 \leq_p L_2$, so ist L_2 NP-vollst.

<u>Beweis:</u> Transitivität von „$\leq_p$". □

Satz: SAT $\leq_p$ CLIQUE

Korollar: CLIQUE ist NP-vollst. $\square$

(Bilder aus Buch: Garey & Johnson)



"I can't find an efficient algorithm, I guess I'm just too dumb."

"I can't find an efficient algorithm, because no such algorithm is possible!"

"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."