Ansage:

Projektabschlusspräsentation:

Dienstag, 3. Juli,

$14^{\underline{15}}$ Uhr, MA 004

Komplexitätsklassen P und NP

P ist die Klasse aller Sprachen, für die es eine DTM gibt, die die Sprache entscheidet und deren Laufzeitfkt. durch ein Polynom in der Eingabegröße beschränkt ist.

Cliquenproblem CLIQUE:

1. Variante: Gegeben $G=(V,E)$, Zahl $k \in \mathbb{N}$, gibt es Clique der Größe k in G?

2. Variante: Gegeben $G=(V,E)$, bestimme max. $k \in \mathbb{N}$, so dass es eine Clique der Größe k in G gibt.

3. Variante: Gegeben $G=(V,E)$, finde größte Clique in G.

Satz: Gibt es einen effizienten Alg. für eine der drei Varianten, dann auch für die anderen beiden Varianten.

Beweis: $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ klar!

Zeige noch $(1) \Rightarrow (3)$:

Gegeben effiziente Unterroutine für Var. 1, konstruiere effiz. Alg. für Variante 3:

1) For $k=1$ to n: Rufe Unterroutine auf für $G=(V,E)$ und k.
Bestimme dabei $\max k = k^*$, für das die Antwort ja ist.

2) For all $v \in V$: Rufe Unterroutine auf

für den Graphen G', der durch Löschen von v entsteht, und für k^*.
Falls „ja", dann lösche v aus G.

Nach Schritt 2) bleibt von G nur noch eine Clique der Größe k^* übrig. $\square$

Diese Beobachtung gilt im Wesentlichen für alle Optimierungsprobleme. Daher genügt es, die Komplexität der zugehörigen Entscheidungsprobleme zu studieren.

Nichtdeterministische Turingmaschinen

Beobachtung: Es scheint algorithmisch schwer zu sein, das Cliquenproblem zu lösen, d.h. es ist kein effizienter Alg. bekannt.
Aber: Bekommt man eine Lösung (Clique) genannt, so können wir leicht überprüfen, ob dies eine zulässige Lösung ist.

Def. (Nichtdet. TM)
Eine nichtdeterministische Turingmasch. (NTM) ist wie eine DTM definiert, mit dem einzigen Unterschied, dass die Fkt.

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow (Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$$

durch eine Relation δ auf

$$(Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$$

ersetzt wird.

Ist die NTM im Zustand $q \in Q$ und liest $a \in \Gamma$, so kann sie sich in den Zustands $q' \in Q$ begeben, das Zeichen $a' \in \Gamma$ schreiben und den Kopf in Richtung $d \in \{L, R, N\}$ bewegen, falls

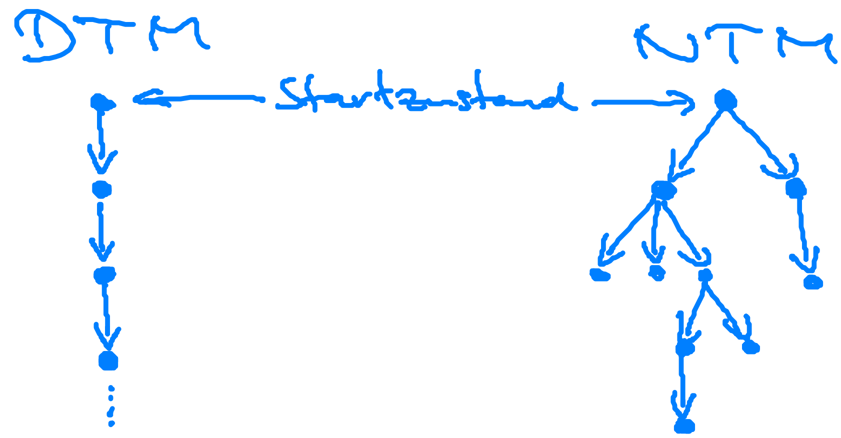
$$((q, a), (q', a', d)) \in \delta$$

Die NTM hat also unter Umständen mehrere Möglichkeiten in einem Rechenschritt. Daher ergeben sich für eine Eingabe mehrere Rechenwege und zugehörige Ausgaben.

<u>Def.:</u> Eine NTM M akzeptiert die Eingabe w, falls es mindestens einen Rechenweg gibt, der zu einem akzeptierenden Endzustand führt.

$$L(M) := \{ w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w \}$$

Intuition:



Eine NTM kann ein „Orakel“ nach dem besten Rechenweg fragen.

Oder: NTM testet parallel alle möglichen Rechenwege.

Def: Betrachte NTM M, die die Sprache L akzeptiert. Die Rechenzeit von M auf Eingabe w ist wie folgt definiert:

- Falls $w \in L$, die Länge eines kürzesten akzeptierenden Rechenwegs.
- Falls $w \notin L$, 0

Wie bei DTMs ist die Laufzeitfkt $t_M(n)$ definiert als

$$t_M(n) := \max.\ \text{Rechenzeit auf Eingabe} \in \Sigma^n.$$

Def.: NP ist die Klasse aller Sprachen L, für die es eine NTM M gibt, die L akzeptiert und $t_M(n) \leq p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ für eine Polynomfkt. p.

Satz: Das zu CLIQUE gehörende Entscheidungsproblem (Variante 1) ist in NP.

Beweisidee: Die NTM rät zunächst k Knoten (nichtdet.!) und überprüft dann (det.), ob diese eine Clique bilden. $\square$

Satz: $P \subseteq NP$.

Beweis: Es sei $L \in P$ und M zugeh. DTM, fasse M als NTM auf. $\square$

Offenes Problem: Ist $P \subsetneq NP$ oder $P = NP$?

„Millennium Problem": 1.000.000 \$!

Satz: Für jede Sprache $L \in NP$ gibt es ein Polynom p und eine DTM M, so dass M die Sprache L entscheidet und die Laufzeit von M beschränkt ist durch

$$t_M(n) \leq 2^{p(n)}.$$

Beweisskizze: Betrachte NTM M' für L mit polyn. Laufzeit. Die DTM M probiert alle Rechenwege von M' sequentiell durch. $\square$

NP-Vollständigkeit:

Def.: Es seien L_1, L_2 Sprachen über Σ_1, Σ_2. Dann heißt L_1 polynomiell reduzierbar auf L_2 ($L_1 \leq_p L_2$), wenn es eine von einer DTM in polynomieller Zeit berechenbare Fkt.

$$f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$$

gibt, so dass

$$\forall w \in \Sigma_1^* : \quad w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2.$$

Satz: $L_1 \leq_p L_2$, $L_2 \in P \Rightarrow L_1 \in P$.

Beweisskizze: gegeben $w \in \Sigma_1^*$, berechne $f(w) \in \Sigma_2^*$, entscheide, ob $f(w) \in L_2$.
Beachte: Länge von $f(w)$ ist polyn. beschr. in der Länge von w. $\square$

Satz: Es gilt:

Hamiltonkreisproblem $\leq_p$ TSP. $\square$

Lemma: $L_1 \leq_p L_2$, $L_2 \leq_p L_3 \Rightarrow L_1 \leq_p L_3$.

Beweis:

$x \in L_1 \Leftrightarrow f_1(x) \in L_2$

$y \in L_2 \Leftrightarrow f_2(y) \in L_3$

$\Rightarrow x \in L_1 \Leftrightarrow f_2(f_1(x)) \in L_3$

Sei $f_3 := f_2 \circ f_1$, dann ist f_3 polyn. berech.

$x \in L_1 \Leftrightarrow f_3(x) \in L_3$. $\square$