Universelle Turing-Maschine

Beobachtung: Für festes M ist die Rechenzeit von U auf der Eingabe <M>, w nur um einen konstanten Faktor größer als die Rechenzeit von M auf w.

Church'sche These:

- Die durch die formale Def. der Turing-Maschine erfasste Klasse berechenbaren Funktionen stimmt überein mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Fkt.
- Die Turing-Maschine erfasst die Rechenzeit bis auf polynomielle Faktoren richtig.

Unentscheidbare Probleme

Def. („Kanonische Ordnung")
Für $w, w' \in \Sigma^*$ schreiben wir $w \leq w'$, falls w kürzer ist als w' oder beide gleich lang sind und w lexikographisch kleiner ist als w'.
Dies definiert eine totale Ordnung auf Σ^*

Def.: Es sei M_i die DTM,

deren Gödelnummer an i-ter Stelle in der Liste aller Gödelnummern steht. Weiter sei w_i das Wort aus Σ^*, das an i-ter Stelle in der kan. Ordnung von Σ^* steht.

Die Diagonalsprache ist def. als

$$D := \{ w_i \mid M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht} \}$$

<u>Satz:</u> D ist nicht rekursiv.

<u>Beweis:</u> Annahme: Es gibt eine DTM M, die D entscheidet.

Es gilt $M = M_j$ für ein $j \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Frage: Was liefert M_j bei Eingabe w_j?

<u>1. Fall:</u> $w_j \in D \Rightarrow M_j$ akzeptiert w_j
aber, nach Def. von D, akz. M_j w_j nicht $\lightning$

<u>2. Fall:</u> $w_j \notin D \Rightarrow M_j$ akz. w_j nicht.
aber, nach Def. von D, akz. M_j w_j. $\lightning$ □

Illustration des Beweises:

Diagonalisierungsargument:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
M_1	ja	ja	nein	nein	ja
M_2	nein	nein	ja	nein	nein
M_3	ja	nein	nein	nein	ja
M_4					
$\vdots$					

Korollar: $\overline{D} := \Sigma^* \setminus D$ ist nicht rekursiv

Beweis: Eine Sprache L ist genau dann rekursiv, wenn ihr Komplement rekursiv ist. (Vertausche akzept. und nicht-akz. Endzustände der zugeh. DTM). $\square$

Def.: Das Halteproblem H ist definiert durch

$$H := \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf } w \}$$

Satz: H ist nicht rekursiv.

Beweis: Annahme: M ist DTM, die H entscheidet. Mit Hilfe von M

konstruieren wir DTM M', die $\overline{D}$ entscheidet.

Es sei $w \in \Sigma^*$, entscheide ob $w \in \overline{D}$:

- Berechne i mit $w = w_i$ und berechne $<M_i>$
- Wende M an auf $<M_i>w$. Ist $<M_i>w \notin H$, so ist $w \notin \overline{D}$.
- Nehme also an, dass $<M_i>w \in H$. Simuliere M_i auf Eingabe w (mit Hilfe der universellen DTM).

M_i akz. $w_i \Leftrightarrow w \in \overline{D}$. $\square$

<u>Def</u>: Die universelle Sprache U ist

$$U = \{<M> w \mid M \text{ akzeptiert } w\}$$

<u>Satz</u>: U ist nicht rekursiv.

<u>Beweis</u>: Andernfalls gibt es DTM M, die $\overline{D}$ entscheidet: Gegeben $w \in \Sigma^*$, ist $w \in \overline{D}$?

- Berechne i mit $w = w_i$ und $<M_i>$

- Entscheide, ob $\langle M_i \rangle w_i \in U$.

<u>Satz:</u> U ist rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar).

<u>Beweis:</u> Wende universelle DTM an auf $\langle M \rangle w$. Falls M das w akzeptiert, dann geschieht dies nach endlich vielen Schritten. $\square$

<u>Def:</u> Das spezielle Halteproblem H_ε ist definiert durch

$$H_\varepsilon = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf } \varepsilon \text{ an}\}$$

(dabei ist ε das leere Wort).

<u>Satz:</u> H_ε ist nicht rekursiv.

<u>Beweis:</u> Ann.: DTM M' entsch. H_ε. Konstruiere daraus TM M'', die H entscheidet.

- M'' berechnet auf Eingabe $\langle M \rangle w$ zunächst $\langle M_w^* \rangle$ der DTM M_w^*

die das folgende leistet:
- schreibe w auf das Band und simuliere M auf w.

• M'' simuliert M' auf $\langle M_w'' \rangle$

M'' akz. $\langle M \rangle w \iff M_w''$ auf ε hält an

$\iff M$ hält auf w an. $\square$.

<u>Korollar</u>: $\overline{H_\varepsilon}$ ist nicht rekursiv.

<u>Def</u>: Es sei $Q \subseteq \Sigma^*$ und $f: Q \to \Sigma^*$

Die Fkt. f heißt total rekursiv (berechenbar), falls es eine DTM gibt, die für geg. $w \in Q$ als Ausgabe $f(w)$ liefert und für $w \notin Q$ nicht anhält oder nicht akzeptiert.

<u>Satz von Rice</u>:

Es sei R die Menge aller berechenbaren Fkt. und $\emptyset \neq S \subsetneqq R$ eine nicht-triviale Teilmenge von R. Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle M \rangle \mid M \text{ berechnet Fkt. aus } S\}$$

nicht rekursiv.