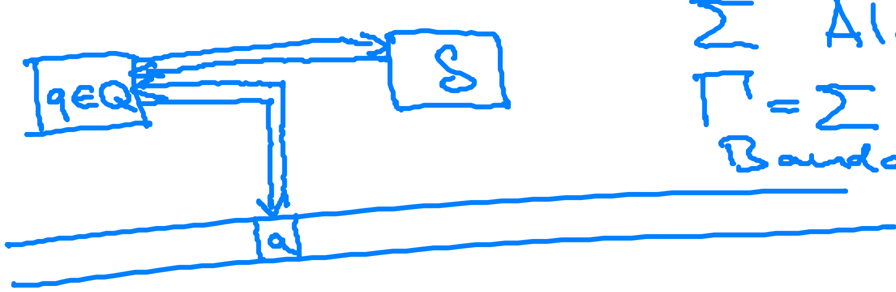
Turing-Maschinen:



Σ Alphabet

$\Gamma = \Sigma \cup \{B\} \cup \{\dots\}$

Bandalphabet

beide endlich

Programm:

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt berechenbar (total rekursiv), falls $\exists$ DTM, die f berechnet.

Entscheidungsproblem $f: \Sigma^* \to \{0,1\}$
zugehörige Sprache $L := f^{-1}(1) \subseteq \Sigma^*$

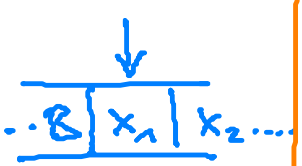
Def: (i) Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv (entscheidbar), wenn es eine DTM gibt, die auf alle Eingaben stoppt und die Eingabe $w \in \Sigma^*$ genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$.

(ii) Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar), wenn es eine DTM gibt, die genau die Eingaben aus L akzeptiert.

Bem: In (ii) wird nicht gefordert, dass die DTM für Eingaben aus $\Sigma^* \setminus L$ terminiert.

Beispiel: Die Sprache $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ ist rekursiv.

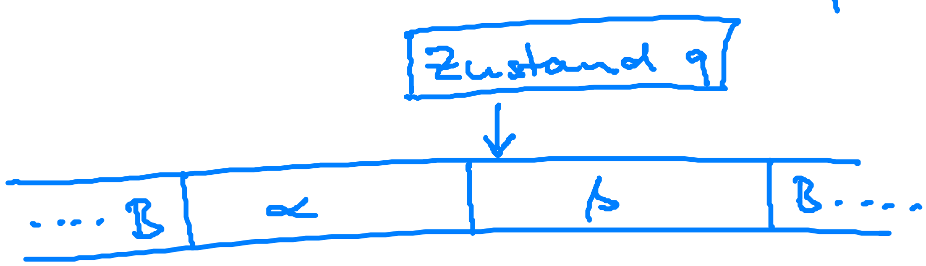
$Q = \{q_0, \dots, q_7\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,1,B\}$, $F = \{q_7\}$



δ	0	1	B
q_0	$(q_0,0,R)$	$(q_1,1,R)$	—
q_1	—	$(q_1,1,R)$	(q_2,B,L)
q_2	—	(q_3,B,L)	—
q_3	$(q_3,0,L)$	$(q_3,1,L)$	(q_4,B,R)
q_4	(q_5,B,R)	—	—
q_5	$(q_6,0,R)$	$(q_6,1,R)$	(q_7,B,R)
q_6	$(q_6,0,R)$	$(q_6,1,R)$	(q_2,B,L)
q_7	—	—	—

<u>Def</u>: <u>Konfiguration</u> einer DTM

α, q, β mit $\alpha, \beta \in \Sigma^*$
$q \in Q$



- α', q', β' ist <u>direkte Nachfolgekonf.</u> von α, q, β, falls man in einem Schritt von α, q, β nach α', q', β' kommt:

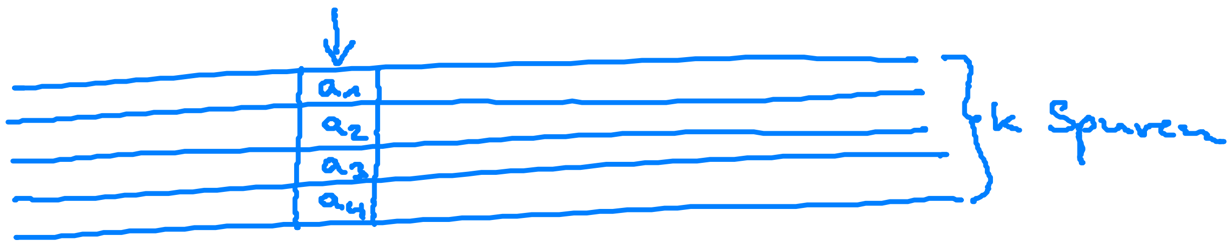
$$\alpha q \beta \vdash \alpha' q' \beta'$$

- α'', q'', β'' ist <u>Nachfolgekonf.</u> von $\alpha q \beta$, falls man nach endlich vielen

Schritten von $\alpha q \beta$ zu $\alpha'' q'' \beta''$ gelangt

$$\alpha q \beta \vdash^* \alpha'' q'' \beta''$$

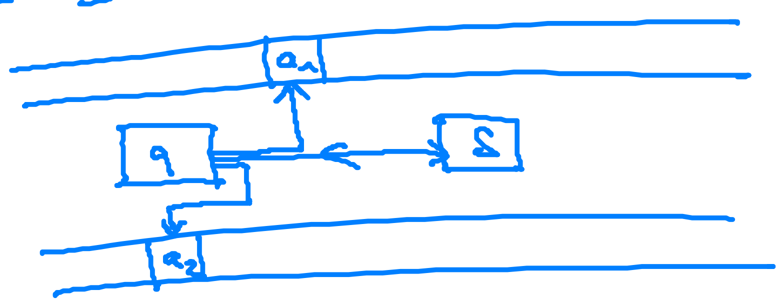
Mehrspur-Turingmaschine



Modelliere dies durch Ersetzen von Γ durch Γ^k

Mehrband-Turing-Maschine

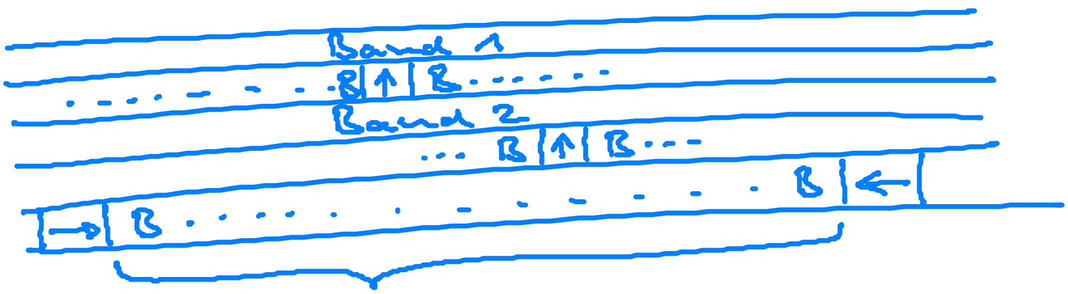
z.B. 2-Band-TM:



allgemein: k Bänder $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$

<u>Satz:</u> Eine k-Band TM M, die mit Rechenzeit $t(n)$ und Platz $s(n)$ auskommt kann von einer TM M' mit Rechenzeit $O(t(n)^2)$ und Platz $O(s(n))$ simuliert werden.

Beweisidee: Benutze TM M' mit $2k+1$ Spuren:



Größe des Bereichs
$\in O(t(n))$ $\square$

Universelle Turing-Maschinen

Betrachte TM M mit $\Sigma = \{0,1\}$ und $\Gamma = \{0,1,B\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $D_1 = L$, $D_2 = R$, $D_3 = N$, $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_t\}$, $F = \{q_2\}$ (oBdA)

Kodiere Programm δ von M wie folgt:

$$\delta(q_i, x_j) = (q_k, x_l, D_m) \qquad z = 1, \ldots, s$$

$$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m \quad = \text{code}(z)$$

Def: Die Gödelnummer der TM M ist:

$$111\,\text{code}(1)\,11\,\text{code}(2)\,11 \ldots 11\,\text{code}(s)\,111 =: \langle M \rangle$$

Def.: Eine universelle TM U

erhält als Eingabe ein Paar $(\langle M\rangle, w)$, wobei M eine TM ist und $w \in \{0,1\}^*$ ist. U simuliert M auf der Eingabe w.

Realisierung von U als 3-Band-TM

i) Teste Eingabe auf Korrektheit

$1110^i10^j10^k10^l10^m11 \ldots \quad i,k \geq 1$

$j,l,m \in \{1,2,3\}$

keine zwei Codes dürfen mit demselben Präfix 0^i10^j beginnen.

ii) Kopiere $\langle M\rangle$ auf Band 2 und überschreibe es auf Band 1 mit Leerzeichen.

iii) Schreibe Zustand q_i von M auf Band 3, kodiert als 0^i

iv) In jedem Schritt:

- Lese x_j auf Band 1, suche auf Band 2 $\quad 110^i10^j1\ldots$, wobei 0^i auf Band 3 steht
- Akzeptiere, falls $i=2$
- Sonst: Lese $0^k10^l10^m11$ auf Band 2, schreibe 0^k auf Band 3, schreibe x_l auf Band 1, bewege Kopf von Band 1 in Richtung D_m.