

Universelle Turing-Maschine

Beobachtung: Für festes M ist die Rechenzeit von U auf der Eingabe $\langle M \rangle, w$ nur um einen konstanten Faktor größer als die Rechenzeit von M auf w .

Church'sche These:

- Die durch die formale Def. der Turing-Maschine erfasste Klasse berechenbarer Funktionen stimmt überein mit der Klasse der intuitiv berechenbaren Fkt.
 - Die Turing-Maschine erfasst die Rechenzeit bis auf polynomielle Faktoren richtig.
-

Unentscheidbare Probleme

Def. („kanonische Ordnung“)

Für $w, w' \in \Sigma^*$ schreiben wir $w \leq w'$, falls w kürzer ist als w' oder beide gleich lang sind und w lexikographisch kleiner ist als w' .

Dies definiert eine totale Ordnung auf Σ^*

Def.: Es sei M_i die DTM,

durch Gödelnummer an i-ter Stelle in der Liste aller Gödelnummern steht. Weiter sei w_i das Wort aus Σ^* , das an i-ter Stelle in der kan. Ordnung von Σ^* steht.

Die Diagonalsprache ist def. als

$$D := \{w_i \mid M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$$

Satz: D ist nicht rekursiv.

Beweis: Annahme: Es gibt eine DTM M , die D entscheidet.

Es gilt $M = M_j$ für ein $j \in \mathbb{N}_{>0}$.

Frage: Was liefert M_j bei Eingabe w_j ?

1. Fall: $w_j \in D \Rightarrow M_j$ akzeptiert w_j
aber, nach Def. von D , akz. M_j w_j nicht \checkmark

2. Fall: $w_j \notin D \Rightarrow M_j$ akz. w_j nicht.

aber, nach Def. von D , akz. M_j w_j . $\checkmark \square$

Illustration des Beweises:

Diagonalisierungsargument:

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
M_1	ja	ja	nein	nein	ja
M_2	nein	nein	ja	nein	nein
M_3	ja	nein	nein	nein	ja
M_4					
\vdots					

Korollar: $\bar{D} := \Sigma^* \setminus D$ ist nicht rekursiv

Beweis: Eine Sprache L ist genau dann rekursiv, wenn ihr Komplement rekursiv ist. (Vertausche akzept. und nicht-akz. Endenstände der zugeh. DTM). \square

Def.: Das Halteproblem H ist definiert durch

$$H := \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ h\u00e4lt auf } w \}$$

Satz: H ist nicht rekursiv.

Beweis: Annahme: M ist DTM, die H entscheidet. Mit Hilfe von M

Konstruieren wir DTM M' , die \bar{D} entscheidet.

Es sei $w \in \Sigma^*$, entscheide ob $w \in \bar{D}$:

- Berechne i mit $w = w_i$ und berechne $\langle M_i \rangle$
- Wende M an auf $\langle M_i \rangle w$. Ist $\langle M_i \rangle w \notin H$, so ist $w \in \bar{D}$.
- Nehme also an, dass $\langle M_i \rangle w \in H$. Simuliere M_i auf Eingabe w (mit Hilfe der universellen DTM).
 $M_i \text{ akz. } w \iff w \in \bar{D}$. \square

Def: Die universelle Sprache
 U ist

$$U = \{ \langle M \rangle w \mid M \text{ akzeptiert } w \}$$

Satz: U ist nicht rekursiv.

Beweis: Andernfalls gibt es DTM M , die \bar{D} entscheidet: Gegeben $w \in \Sigma^*$, ist $w \in \bar{D}$?

- Berechne i mit $w = w_i$ und $\langle M_i \rangle$

- Entscheide, ob $\langle M_i \rangle w_i \in U$.

Satz: U ist rekursiv aufzählbar
(semi-entscheidbar).

Beweis: Wende universelle DTM an auf $\langle M \rangle w$. Falls M das w akzeptiert, dann geschieht dies nach endlich vielen Schritten. \square

Def: Das spezielle Halteproblem H_ε ist definiert durch

$$H_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf } \varepsilon \text{ an} \}$$

(dabei ist ε das leere Wort).

Satz: H_ε ist nicht rekursiv.

Beweis: Ann.: DTM M' entsche.

H_ε . Konstruiere daraus TM M'' , die H entscheidet.

- M'' berechnet auf Eingabe $\langle M \rangle w$ zunächst $\langle M'' \rangle$ der DTM M''

die das folgende leistet:

- schreibe w auf das Band und
simuliere M auf w .

• M'' simuliert M' auf $\langle M'' \rangle$

M'' akz. $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M''$ auf ϵ
hält an

$\Leftrightarrow M$ hält auf
 w an. \square

Korollar: $\overline{H_\epsilon}$ ist nicht rekursiv.

Def: Es sei $Q \subseteq \Sigma^*$ und $f: Q \rightarrow \Sigma^*$

Die Fkt. f heißt total rekursiv
(berechenbar), falls es eine DTM gibt,
die für geg. $w \in Q$ als Ausgabe
 $f(w)$ liefert und für $w \notin Q$ nicht
anhält oder nicht akzeptiert.

Satz von Rice:

Es sei R die Menge aller bere-
chenbaren Fkt. und $\emptyset \neq S \subsetneq R$
eine nicht-triviale Teilmenge
von R . Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{ \langle M \rangle \mid M \text{ berechnet} \\ \text{Fkt. aus } S \}$$

nicht rekursiv.
