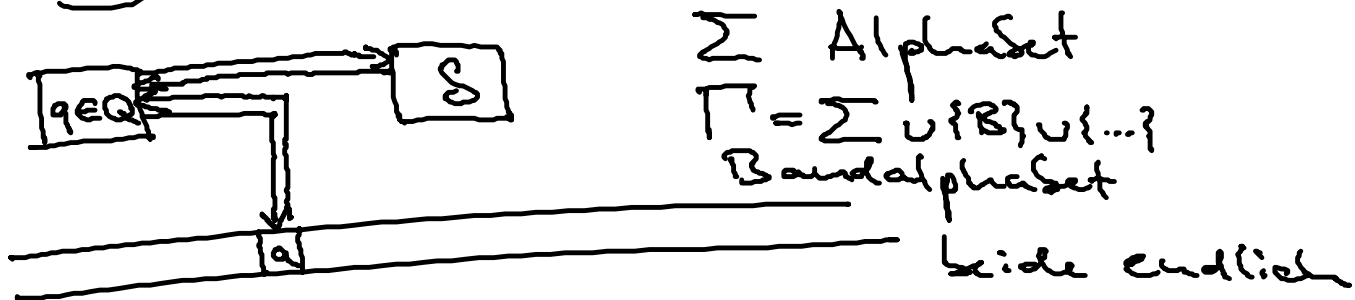


# Turing-Maschinen:



$\Sigma$  Alphabet  
 $\Gamma = \Sigma \cup \{B\} \cup \{\dots\}$   
Bandalphabet

beide endlich

Programm:

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

$f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  heißt berechenbar (total rekursiv) falls  $\exists$  DTM, die  $f$  berechnet.

---

Entscheidungsproblem  $f: \Sigma^* \rightarrow \{0,1\}$   
zugehörige Sprache  $L := f^{-1}(1) \subseteq \Sigma^*$

---

Def: (i) Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt rekursiv (entscheidbar), wenn es eine DTM gibt, die auf alle Eingaben stoppt und die Eingabe  $w \in \Sigma^*$  genau dann akzeptiert, wenn  $w \in L$ .

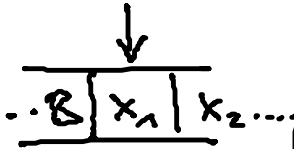
(ii) Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  heißt rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar), wenn es eine DTM gibt, die genau die Eingaben aus  $L$  akzeptiert.

Bem: In (ii) wird nicht gefordert, dass die DTM für Eingaben aus  $\Sigma^* \setminus L$  terminiert.

Beispiel: Die Sprache  $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$  ist rekursiv.

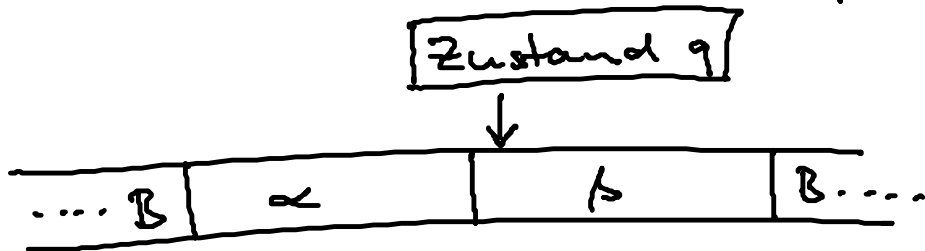
$Q = \{q_0, \dots, q_7\}$ ,  $\Sigma = \{0,1\}$ ,  $\Gamma = \{0,1,B\}$ ,  $F = \{q_7\}$

S	0	1	B
q <sub>0</sub>	(q <sub>0</sub> , 0, R)	(q <sub>1</sub> , 1, R)	—
q <sub>1</sub>	—	(q <sub>1</sub> , 1, R)	(q <sub>2</sub> , B, L)
q <sub>2</sub>	—	(q <sub>3</sub> , B, L)	—
q <sub>3</sub>	(q <sub>3</sub> , 0, L)	(q <sub>3</sub> , 1, L)	(q <sub>4</sub> , B, R)
q <sub>4</sub>	(q <sub>5</sub> , B, R)	—	—
q <sub>5</sub>	(q <sub>6</sub> , 0, R)	(q <sub>6</sub> , 1, R)	(q <sub>7</sub> , B, R)
q <sub>6</sub>	(q <sub>6</sub> , 0, R)	(q <sub>6</sub> , 1, R)	(q <sub>2</sub> , B, L)
q <sub>7</sub>	—	—	—



Def: Konfiguration einer DTM

$$\alpha, q, \beta \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \Sigma^* \\ q \in Q$$



- $\alpha', q', \beta'$  ist direkte Nachfolgekonf. von  $\alpha, q, \beta$ , falls man in einem Schritt von  $\alpha, q, \beta$  nach  $\alpha', q', \beta'$  kommt:

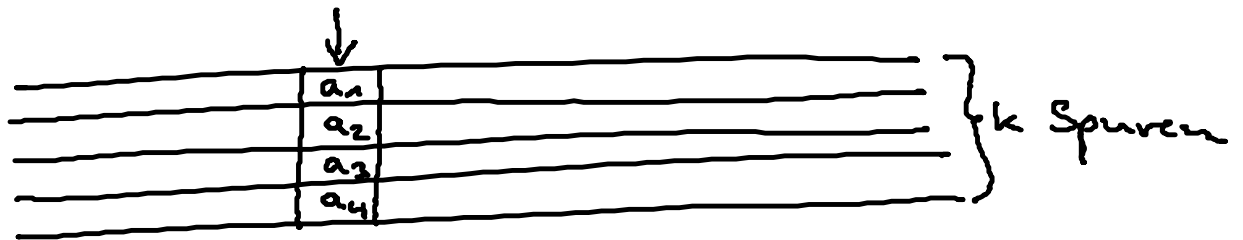
$$\alpha q \beta \vdash \alpha' q' \beta'$$

- $\alpha'', q'', \beta''$  ist Nachfolgekonf. von  $\alpha q \beta$ , falls man nach endlich vielen

Schritten von  $\alpha q \beta$  zu  $\alpha^n q^n \beta^n$  gelangt

$$\alpha q \beta \vdash^* \alpha^n q^n \beta^n$$

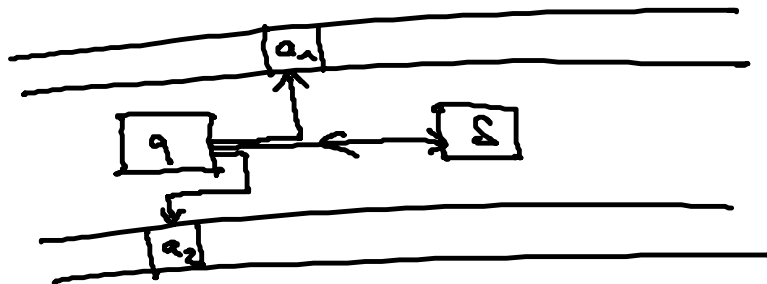
## Mehrspur-Turingmaschine



Modelliere dies durch Ersetzen von  $\Gamma$  durch  $\Gamma^k$

## Mehrband-Turing-Maschine

z.B. 2-Band-TM:

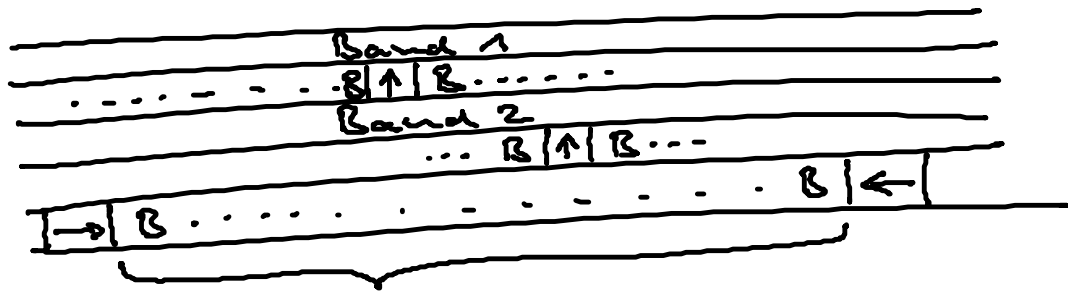


allgemein:  $k$  Bänder  $S: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$

Satz: Eine  $k$ -Band TM  $M$ , die mit Rechenzeit  $t(n)$  und Platz  $s(n)$  auskommt kann von einer TM  $M'$  mit Rechenzeit  $O(t(n)^2)$  und Platz  $O(s(n))$  simuliert werden.

Beweisidee: Benutze TM  $M'$  mit  $2k+1$

Spuren:



Größe des Bereichs

$$\in O(t(n))$$

□

## Universelle Turing-Maschinen

Betrachte TM  $M$  mit  $\Sigma = \{0, 1\}$  und

$$\Gamma = \{0, 1, B\} = \{x_1, x_2, x_3\}, D_1 = L, D_2 = R,$$

$$D_3 = N, Q = \{q_1, q_2, \dots, q_t\}, F = \{q_2\} \text{ (0B1A)}$$

Kodiere Programm  $S$  von  $M$  wie folgt:

$$\delta(q_i, x_j) = (q_k, x_e, D_m) \quad z = 1, \dots, s$$

$$0^i 10^j 10^k 10^e 10^m = \text{code}(z)$$

Def: Die Gödelnummer der TM  $M$

ist:  $111 \text{code}(1) 11 \text{code}(2) 11 \dots 11 \text{code}(s) 111$

$$=: \langle M \rangle$$

Def: Eine universelle TM  $U$

erhält als Eingabe ein Paar  $(\langle M \rangle, w)$ , wobei  $M$  eine TM ist und  $w \in \{0,1\}^*$  ist.  $U$  simuliert  $M$  auf der Eingabe  $w$ .

### Realisierung von $U$ als 3-Band-TM

i) Teste Eingabe auf Korrektheit

$110^i 10^j 10^k 10^l 10^m 11 \dots$   $i, k \geq 1$

$j, l, m \in \{1, 2, 3\}$

keine zwei Codes dürfen mit demselben Präfix  $0^i 10^j$  beginnen.

ii) Kopiere  $\langle M \rangle$  auf Band 2 und überschreibe es auf Band 1 mit Leerzeichen.

iii) Schreibe Zustand  $q_i$  von  $M$  auf Band 3, kodiert als  $0^i$

iv) In jedem Schritt:

- Lese  $x_j$  auf Band 1, suche auf Band 2  $110^i 10^j 1 \dots$ , wobei  $0^i$  auf Band 3 steht

- Akzeptiere, falls  $i=2$

- Sonst: Lese  $0^k 10^l 10^m 11$

auf Band 2, schreibe  $0^k$  auf

Band 3, schreibe  $x_l$  auf Band 1,

bewege Kopf von Band 1 in Richtung Dun.