Ansagen:

Morgen: Projekt-Kickoff ab 14:15 Uhr

Hashing

→ gestreute Speicherung

Alternative zu Suchbäumen

unterstützt: - Suchen

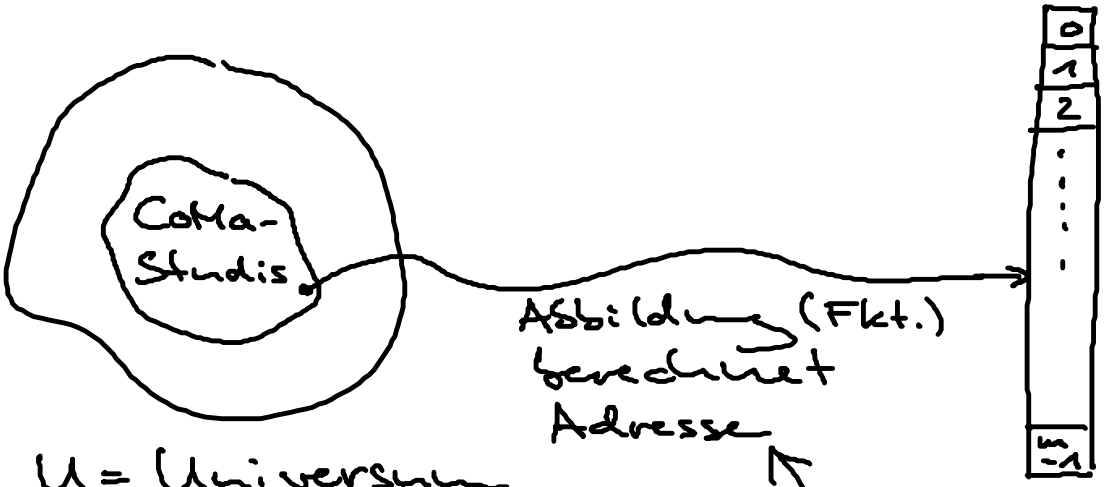
- Einfügen
- Löschen (partiell)

Vorteil von Hashing gegenüber Suchb.:
Aufwand pro Operation $O(1)$ im Mittel!

aber: schlechter als Suchbäume im Worst Case, nämlich $\Theta(n)$.

Grundidee: Reserviere „Hashtabelle" im Speicher, in der die abgespeicherten Daten stehen (Vorstellung: array).

gegeben: Datensätze mit Schlüssel



U = Universum
z.B. alle Studierende der TU Berlin

Hashfkt.
$h: U \to \{0,1,\dots,m-1\}$

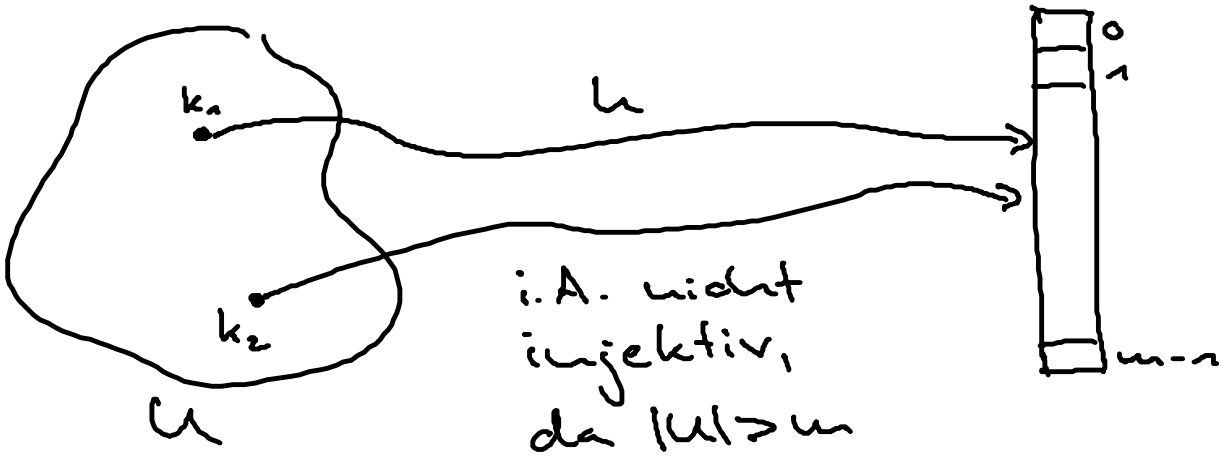
einfachste Lösung („direct addressing"):
h bijektive Abbildung

Nachteil: Hashtabelle (array) belegt viel mehr Speicher als nötig, falls U deutlich größer als die interessante Teilmenge ist.

$$n := \#\text{Datensätze im Teilmenge} \ll |U|$$

Wichtig: Man kennt a priori nicht die Schlüssel der n Datensätze. Ganz U kommt in Frage.

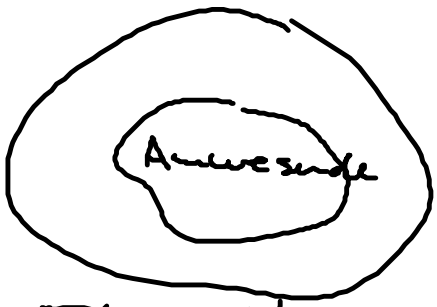
Ziel: Größe der Hashtabelle soll ungefähr Anzahl der Datensätze entsprechen.



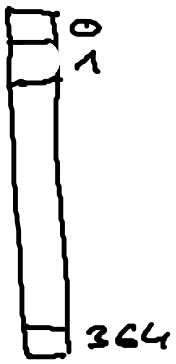
$\Rightarrow$ i.A. gibt es $k_1 \neq k_2$ mit $h(k_1) = h(k_2)$.
Dies nennt man Kollision.

Kollisionen sind sehr Wahrscheinlich, lassen sich kaum vermeiden.

Experiment:



TU-Studis



Jan. 22
Feb. 8,7
März 1
April 1
Mai 31
Juni 7,3
Juli:
Aug 22, 15, 14, 13, 23
Sept. 27, 30, 14
Okt. 6, 17, (5), 27
Nov. 3
Dez. 16, 24, 11

„Geburtstags-paradoxon"

$n = 26$
$m = 365$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Kollision auftritt, unter der Annahme, dass die $h(k)$ zufällig und gleichverteilt.

$$q(m,n) = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot \ldots \frac{m-n+1}{m} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot m^n}$$

m: Größe der Hash-Tab. n: #Datensätze

Wahrscheinlichkeit für eine Kollision:

$1 - q(m,n)$, $m = 365$

n	20	23	30	50	...
$1-q(m,n)$	0,411	0,507	0,706	0,97	...

Folgerung: Kollisionen treten fast sicher auf $\rightarrow$ Hashverfahren muss mit Kollisionen umgehen können.

Vorher: Was sind gute Hash-Fkt.? Man möchte, dass h gleichmäßig über den Adressraum streut, d.h. jede Adresse wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{m}$ gewählt ("uniform hashing")

In der Praxis ist dies nur angenähert realisierbar. Nutze diese Annahme jedoch für Analyse:

$$\forall j \quad \sum_{k \in K:\, h(k)=j} p(k) = \frac{1}{m}$$

mit $p(k)$ = W'keit für Auftreten

$\underbrace{h(k)=j}$ W'keit dafür, dass Speicherstelle j getroffen wird.

von Schlüssel k in einer Iteration.

Im Folgenden: Schlüssel k sind immer ganze Zahlen.

Divisionsmethode: $h(k) = k \bmod m$

Dadurch wird Projektion von $\mathbb{N}$ auf $\{0,\dots,m-1\}$ erreicht.

z.B.: $m = 2^q$
k Binärzahl

h schneidet in diesem Fall die vordersten Bits ab und behält nur die q kleinsten Bits.

$\longrightarrow$ könnte u.U. zu Häufung von Kollisionen führen.

Empirisch gute Wahl für m:
Primzahl weit entfernt von 2er-Potenzen.

Multiplikationsmethode:
Wähles festes $0 < A < 1$ und def.:

$$h(k) = \lfloor m \cdot \underbrace{(k \cdot A - \lfloor k \cdot A \rfloor)} \rfloor$$

$\in [0,1)$

$\in [0,m)$

$\in \{0,1,\dots,m-1\}$

z.B. $m = 2^9$

empirisch gute Wahl für A: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\approx 0{,}618\dots$

Bsp: $k = 123456$, $m = 10.000$, $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

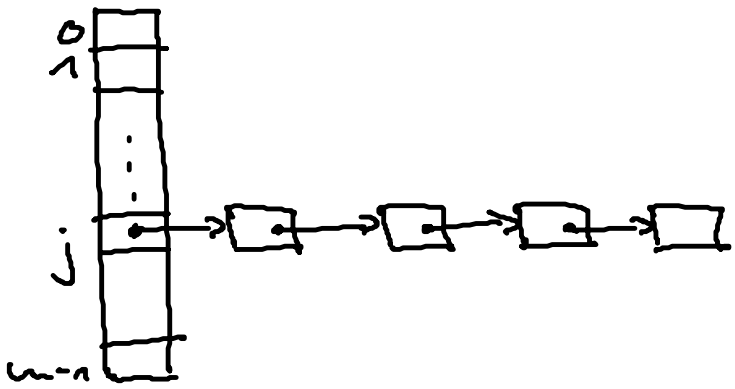
$$h(k) = \lfloor 10.000 \cdot (\underbrace{123456 \cdot A - \lfloor 123456 \cdot A \rfloor}_{\approx 0.0041151\dots}) \rfloor = 41$$

jetzt: Umgang mit Kollisionen

1) Hashing mit Überlauf („chaining")

2) Hashing mit Ersatzadresse („open addressing")

ad 1) Lege pro Platz in der Hashtabelle eine Liste an; speichere alle Datensätze k mit $h(k) = j$ in der Liste zum Speicherplatz j ab.



Aufwand für das Einfügen (am Beginn der Liste): $O(1)$

Aufwand für Suchen: (im Mittel)

Annahmen:

- Hashfkt. streut gut ("uniform hashing")
- Es sind n Datensätze in der Hash-Tabelle

$\Rightarrow$ Im Mittel sind $\frac{n}{m}$ Datensätze pro Liste vorhanden.

$\Rightarrow$ Erfolglose Suche erfordert im Mittel Aufwand $O(1 + \frac{n}{m})$

- 1: Berechnung von $h(k)$
- $\frac{n}{m}$: Durchgehen der Liste

$\alpha = \frac{n}{m}$ „Auslastung der Hashtabelle"

Wähle typischerweise $m \in \Theta(n)$

Aufwand $O(1+\alpha) = O(1)$

(α: Konstante)

Betrachte noch erfolgreiche Suche:

Beachte: Die Liste $h(k)$ enthält mindestens ein Element (nämlich Element mit Schlüssel k). Daher ist die mittlere Länge der Liste an der Stelle $h(k)$ durch $1 + \frac{n-1}{m}$ beschr.

$\Rightarrow$ Aufwand: $O(1 + 1 + \alpha)$

1: Berechne $h(k)$; $1 + \alpha$: Länge der Liste inkl. k

Aufwand für die 3 Operationen:

Einfügen: $O(1)$

Suchen: $O(1+\alpha)$ im Mittel

Löschen: $O(1+\alpha)$

$\Rightarrow$ alle Operationen erfordern im Mittel konstanten Aufwand.

Aber: Worst-Case-Aufwand für Suchen ist $\Omega(n)$ (alle n Schlüssel in derselben Liste)

Bsp: Divisionsmethode

$n = 2000$ 3 Vergleiche im Mittel ok

$\rightarrow \frac{n}{m} \approx 3 \Rightarrow n \approx \frac{n}{3}$

Wähle Primzahl $m = 701$, weit entfernt von Zer-Potenzen 512, 1024

$\rightarrow h(k) = k \bmod 701$

hier: # Vergleiche bestimmt Größe der Hashtabelle

<u>generell</u>: Tradeoff zwischen Größe der Hash-Tabelle (Speicher) und # Vergl. beim Suchen (Zeit).