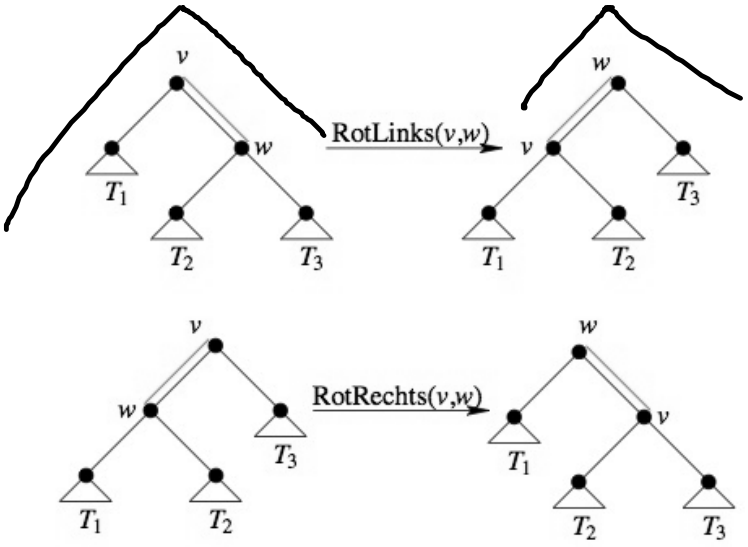
Ansagen:

- Projektstart am 14. Mai in der VL
- Gruppengröße für Projekt: 8-10
- Bitte Gruppen bilden, alle übrigen werden von uns eingeteilt.

Suchbäume:



Je zwei Suchbäume zu derselben Schlüsselmenge können mit Hilfe dieser Rotationen ineinander überführt.

Die drei Suchbaum-Operationen

- suchen
- einfügen
- löschen

können mit Aufwand $O(h(T))$ durchgeführt werden.

Daher hätten wir gerne „balancierte" Klasse von Suchbäumen, die die folgende Eigenschaft hat:

1) Für jedes n gibt es in der Klasse einen balancierten Suchbaum T mit

$$h(T) \in O(\log n)$$

2) Drei Basisoperationen können auf dieser Klasse in Zeit $O(h(T))$ durchgeführt werden.

3) Klasse ist abgeschlossen unter den drei Basisoperationen, d.h. nach dem Einfügen oder Löschen eines Knotens muss der resultierende Baum wieder in der Klasse liegen.

Eine Klasse, die diesen Anforderungen genügt, sind die sogenannten

AVL-Bäume

AVL steht für die Namen der Erfinder:

Adelson-Velski & Landis (1962)

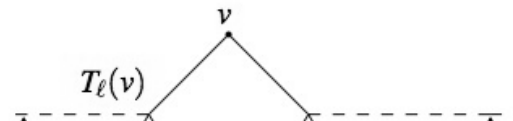
d.h.: altes Konzept, jedoch einfach zu beschreiben und zu analysieren.

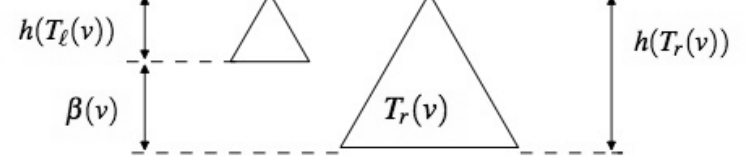
Zur Definition von AVL-Bäumen benötigen wir den Begriff der „Balance":

Sei T ein binärer Suchbaum und sei $v \in V$ ein Knoten. Seien $T_\ell(v)$ und $T_r(v)$ die (evtl. leeren Teilbäume) von v. Dann heißt

$$\beta(v) := h(T_r(v)) - h(T_\ell(v)) \qquad \text{mit } h(\emptyset) = -1 \tag{5.1}$$

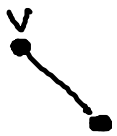
die *Balance des Knoten* v.



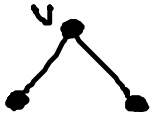


Bsp:

$\beta(v) = -1 - 0 = -1$



$\beta(v) = 0 - (-1) = 1$



$\beta(v) = 0 - 0 = 0$

Def: Ein binärer Suchbaum T heißt AVL-Baum, falls für jeden Knoten v in T gilt: $|\beta(v)| \leq 1$

Satz: Für einen AVL-Baum T mit n Knoten gilt:

$$h(T) \leq 2 \cdot \log(n)$$

Sogar 1.44....

Idee des Beweises: Betrachte extremale AVL-Bäume, die zu vorgegebener Höhe eine minimale Anzahl Knoten enthalten.

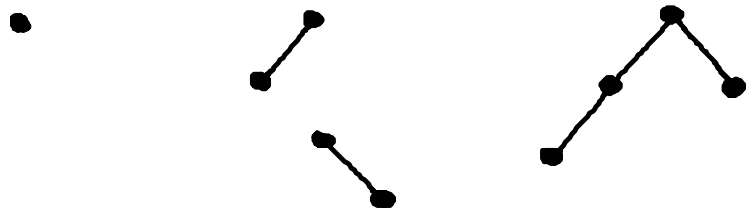
Def.: T heißt extremaler AVL-Baum

der Höhe h, falls T AVL-Baum ist und

$$n(T) = \min\{n(T') \mid T' \text{ AVL-Baum}, h(T')=h\}$$

↑ * Knoten

Bsp: $h=0$ $h=1$ $h=2$



Vermutete Struktur eines extr. AVL-Baumes:

1) Höhendifferenz (Balance) ist in jedem inneren Knoten 1 oder -1
2) Für $h \geq 2$ sind T_e und T_r extremale AVL-Bäume zur Höhe $h-1$ und $h-2$.

Lemma: Ein extremaler AVL-Baum zur Höhe $h \geq 2$ hat als Teilbäume extremale AVL-Bäume zur Höhe $h-1, h-2$.

Beweis: Es sei v Wurzel von T.

Falls $\beta(v)=0$, dann kann man aus dem rechten Teilbaum alle Knoten auf Level h löschen und erhält wieder einen

AVL-Bäume der Höhe h mit weniger Knoten. ↯

⟹ Teilbäume T_e und T_r haben die Höhen $h-1$ und $h-2$.

Ann: T_e ist kein extremaler AVL-Baum zur Höhe $h(T_e)$. Dann ersetze T_e in T durch extremalen AVL-Baum der Höhe $h(T_e)$. Dieser besitzt weniger Knoten, also besitzt T nach dem Ersetzen weniger Knoten, ist aber weiterhin AVL-Baum zur Höhe h ↯

genauso: T_r ist extremal... □

Rekursionsformel für die Anzahl der Knoten eines extremalen AVL-Baumes:

$$n(h) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h=0 \\ 2 & \text{" } h=1 \\ 1+n(h-1)+n(h-2) & \text{falls } h \geq 2 \end{cases}$$

Lemma: Die minimale Knotenzahl $n(h)$ eines AVL-Baumes der Höhe h erfüllt:

$$n(h) \geq 2^{\frac{h}{2}}.$$

Beweis: Induktion über h:

Ind. Anf.: $h=0$ $\quad n(h) = 1 = 2^{0/2}$

$h=1$ $\quad n(h) = 2 \geq 2^{1/2} = \sqrt{2}$

Ind. Schritt: $h \geq 2$

$$\begin{aligned} n(h) &= 1 + n(h-1) + n(h-2) \\ &= 1 + 1 + n(h-2) + n(h-3) + n(h-2) \\ &\geq 2 \cdot n(h-2) \overset{\text{Ind.}}{\geq} 2 \cdot 2^{\frac{h-2}{2}} = 2^{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$ □

Daraus folgt mittels Logarithmieren die Aussage des Satzes:

$$\log(n(h)) \geq \frac{h}{2}$$

$$\Leftrightarrow h \leq 2 \cdot \log(n(h))$$

$$\Rightarrow h \leq 2 \cdot \log(n) \text{ für beliebige}$$

AVL-Bäume der Höhe h mit n Knoten (da $n \geq n(h)$).

Man kann eine bessere Schranke

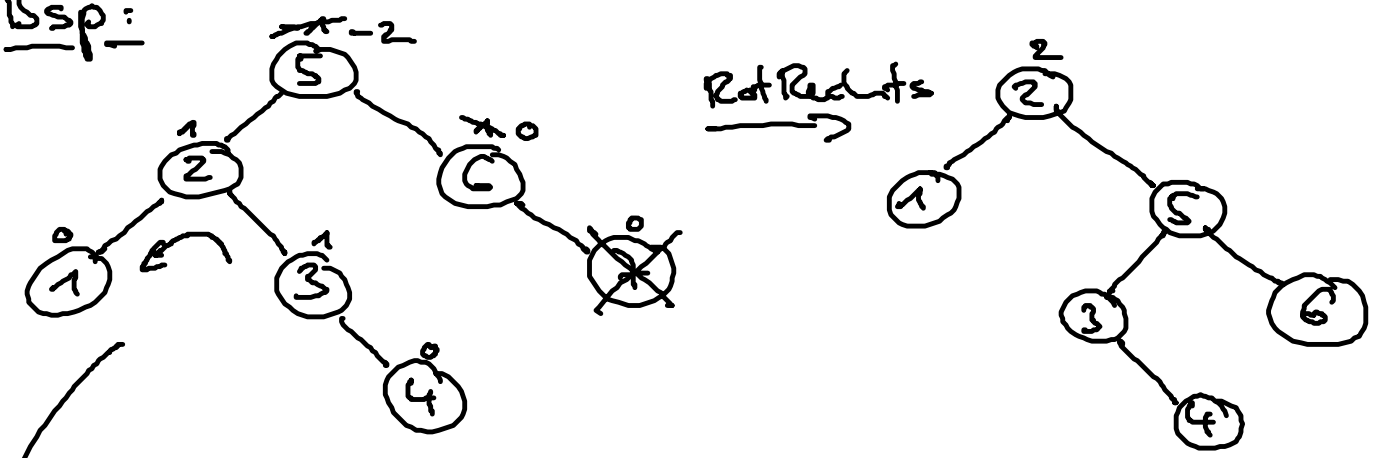
$$h \leq 1{,}44\ldots \cdot \log(n)$$

beweisen, indem man ausnutzt, dass die Rekursionsgleichung für $n(h)$ große Ähnlichkeit zur Rekursionsgleichung der Fibonacci-Zahlen aufweist....

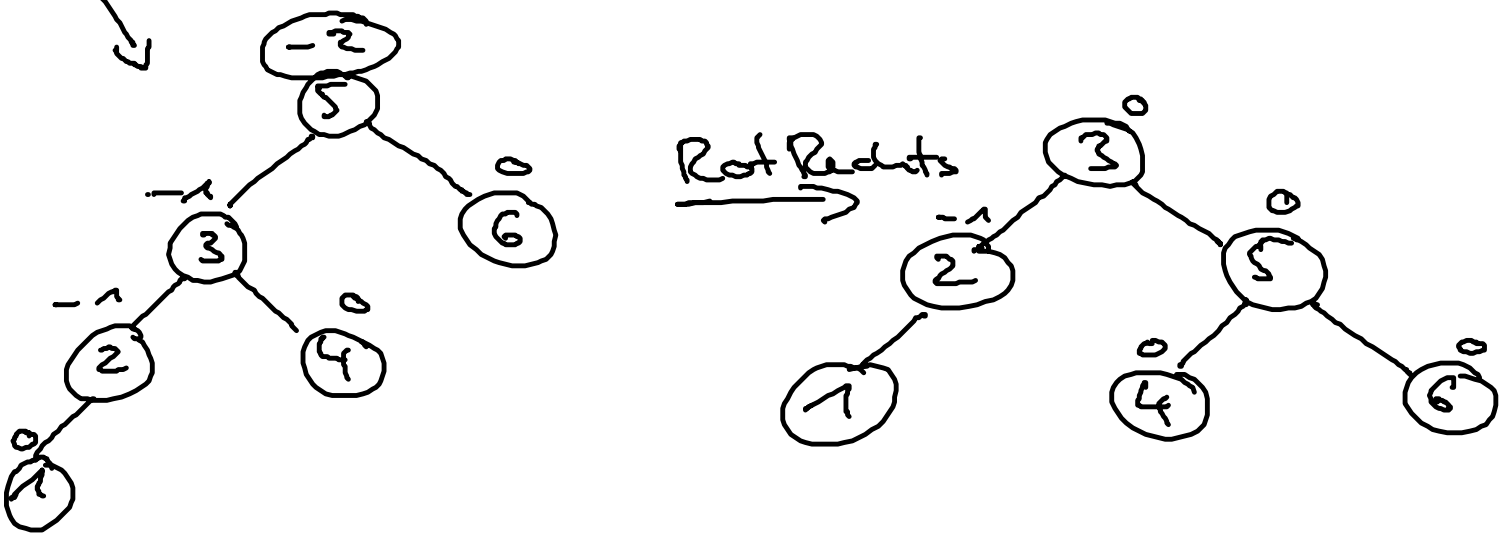
Problem: Wie kann man sicherstellen,

dass nach Einfügen oder Löschen eines Knotens weiterhin ein AVL-Baum vorliegt?

Bsp:



Idee: Führe vor RotRechts erst eine Linksrotation durch:



Lemma 5.2 (Rotationslemma für AVL-Bäume) *Sei T ein Baum mit Wurzel v. Der linke und der rechte Teilbaum T_ℓ, T_r von T seien AVL-Bäume. Die Wurzel v sei geringfügig außer Balance, d.h. $|\beta(v)| = 2$. Dann folgt:*

a) *T kann durch eine Rotation bzw. Doppelrotation in einen AVL-Baum T' überführt werden mit $h(T') \leq h(T)$.*

b) *Die Art der Rotation (einfach links, ..., doppelt rechts) kann mit $O(1)$ Aufwand ermittelt werden.*

c) *Die Rotation kann in $O(1)$ Aufwand durchgeführt werden.*

d) Alle veränderten Balancen in T' können mit $O(1)$ Aufwand aus denen in T berechnet werden.

Def. der Doppelrotationen:

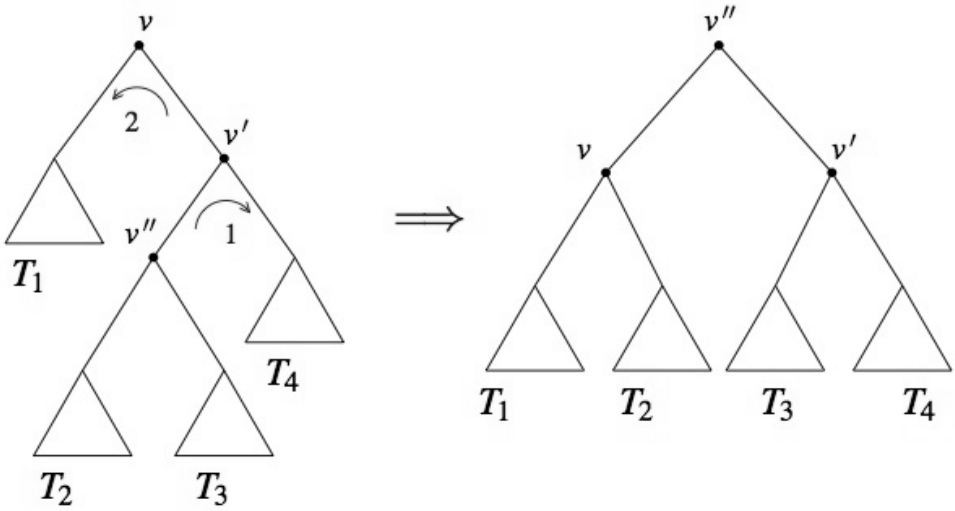


Abbildung 5.6: Doppellinksrotation DRotLinks(v, v', v'').

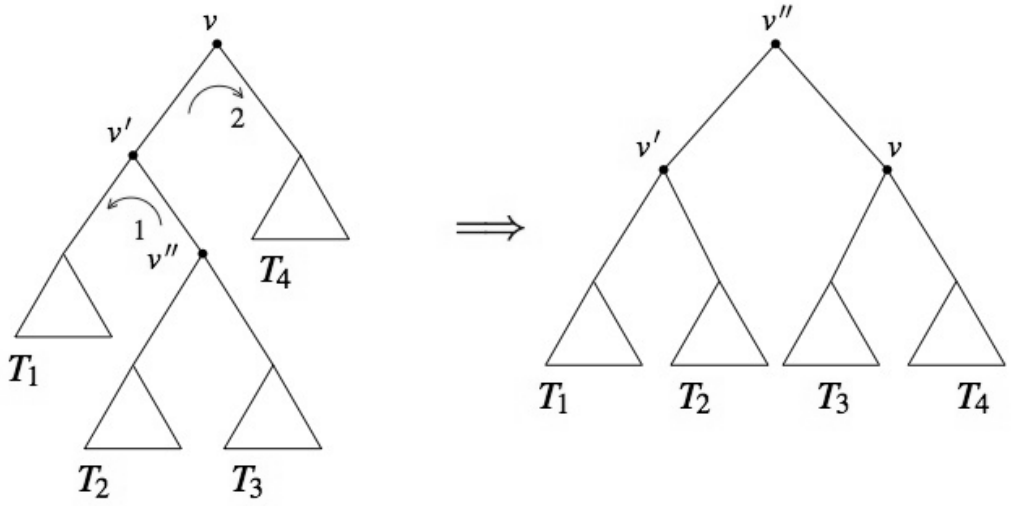


Abbildung 5.7: Doppelrechtsrotation DRotRechts(v, v', v'').