Ansagen:

- Anmeldung zu Tutorien bis Mittwoch über Moses
- Bis Mittwoch: 3er-Gruppen für HA/PA bilden.
- Modulklausur: 22. Juli, 4. Okt.
- Schein-Kriterien:
  - 50% Punkte HA
  - 3 PA, davon jeden einmal vorstellen
  - Projekt

- Rücksprachen

- 1. HA / PA: diese Woche
  HA-Abgabe: Di, 14:15 Uhr
  PA-Abgabe: Do / Fr

Inhalt: Algorithmen, Datenstrukturen,
Grundlagen aus Theor. Informatik

Sortieren

bislang: Bubblesort, Selection Sort,
Insertion Sort: Aufwand $\Theta(n^2)$
Merge Sort: Aufwand $\Theta(n \log n)$
Quick Sort: Aufwand
- worst case $\Theta(n^2)$
- average case $\Theta(n \log n)$

Heap Sort $O(n \log n)$ Vergleiche im worst case
empirisch vergleichbar mit Merge Sort.

Verwende neue dynamische Datenstruktur: **Heap**

Ein Heap ist eine spezielle Variante einer Priority Queue

Wertebereich: homogener Kompon.Typ
(wie bei array)

alle Komponenten haben u.a.
einen Schlüssel.

Eine Priority Queue unterstützt die folgenden Operationen:

1) Einfügen einer Komponente
insert ()

2) Zugriff auf Komponente mit größtem Schlüssel
maximum ()

3) Entferne Komponente mit dem größten Schlüssel
extractMax ()

[4) Ändern eines Schlüssels
changeKey ()]

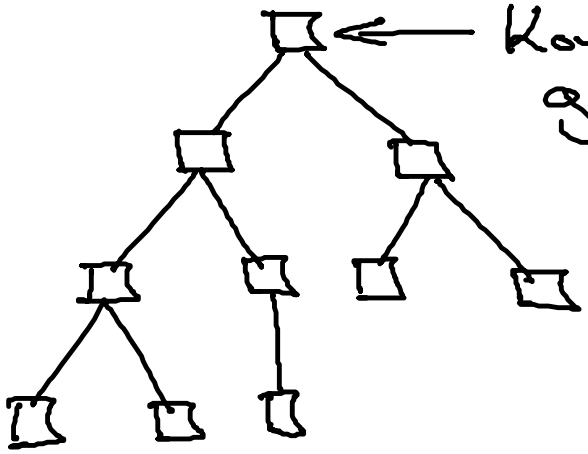
All diese Operationen sollen möglichst effizient (schnell) durchführbar sein.

Im Falle eines Heaps:

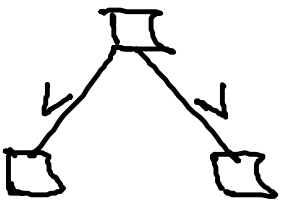
insert() : $O(\log n)$
maximum() : $O(1)$
extractMax() : $O(\log n)$
changeKey() : $O((\log n)$

große Vorstellung eines Heaps:

voller binärer Baum



Bedingung: Für jeden Knoten gilt:
Die Schlüssel seinen Kinder sind kleiner als der eigene Schlüssel

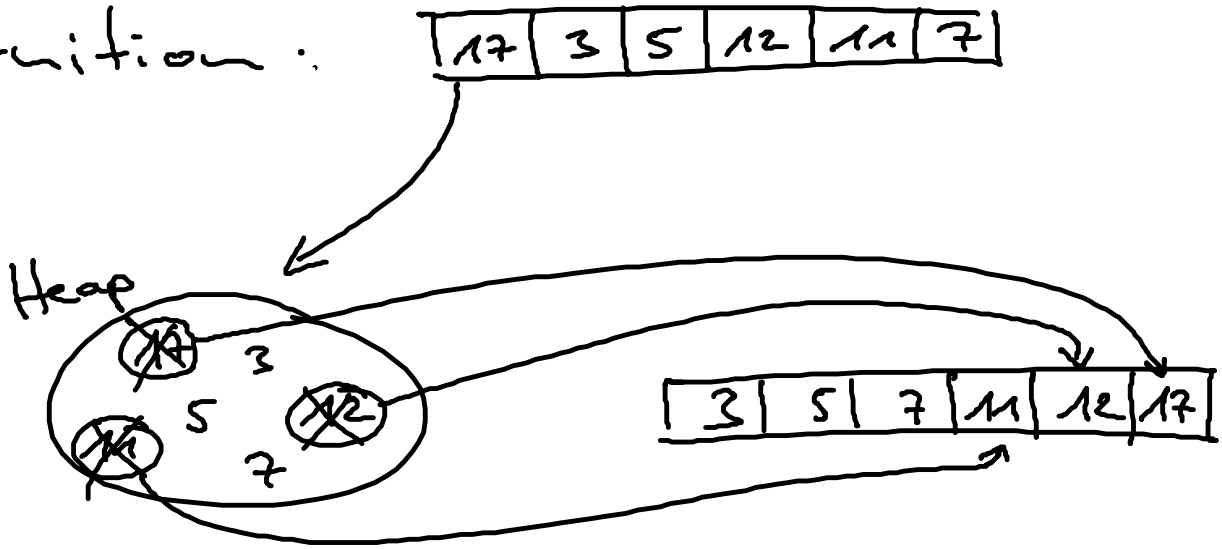


Grobstruktur von HeapSort:

Grobstruktur von Heapsort

1. Gegeben sei das Array `vec[]` mit n Komponenten.
2. Initialisiere den Heap mit den Komponenten von `vec`.
3. **for** $i := n-1$ **downto** 0 **do**
   - 3.1 Greife auf das größte Element des Heaps zu.
   - 3.2 Weise diesen Wert der Arraykomponente `vec[i]` zu.
   - 3.3 Entferne das größte Element aus dem Heap.

Intuition:



Schleifeninvariante: Nach j Durchläufen der Schleife stehen die j größten Elemente sortiert in den letzten j Einträgen des Arrays.

Aufwand:

Aufbau des Heaps: $\sum_{i=n}^{n} O(\log i)$

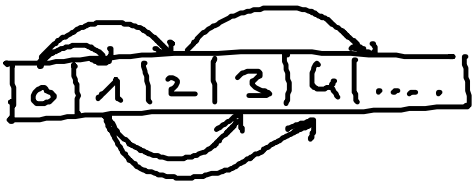
$\in O(n \log n)$

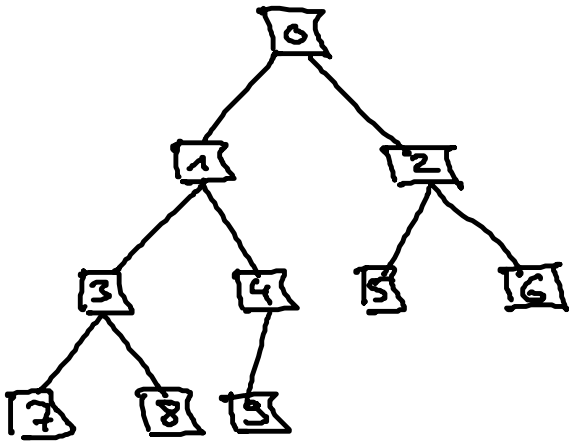
n-maliges Extrahieren des Maximums:

$$\sum_{i=0}^{n-1} O(\log(n-i)) \in O(n \log n).$$

Implementation des Heaps

im Array: Interpretiere Array als vollen binären Baum:





Die Kinder von Knoten i haben die Nummern $2i+1, 2i+2$

Def: Ein Array erfüllt die **Heapeigenschaft** genau dann wenn jeder Knoten in dem zugeh. vollen binären Baum einen größeren Schlüssel besitzt als seine Kinder.

$$\forall i: \text{vec}[i].\text{key} > \text{vec}[2i+1].\text{key}$$
$$\text{und} \quad " \quad > \text{vec}[2i+2].\text{key}$$

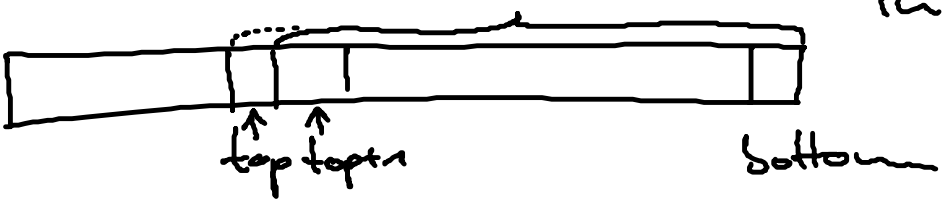
(sofern $2i+1, 2i+2 < n$ (Länge des Arrays)).

Folgerung:

- größtes Element steht in vec[0]
- entlang eines Weges von der Wurzel zu einem Blatt fallen die Schlüssel streng monoton.

Methode zur Herstellung der Heapeigenschaft

void heapify (Item[] vec, int top, int bottom)

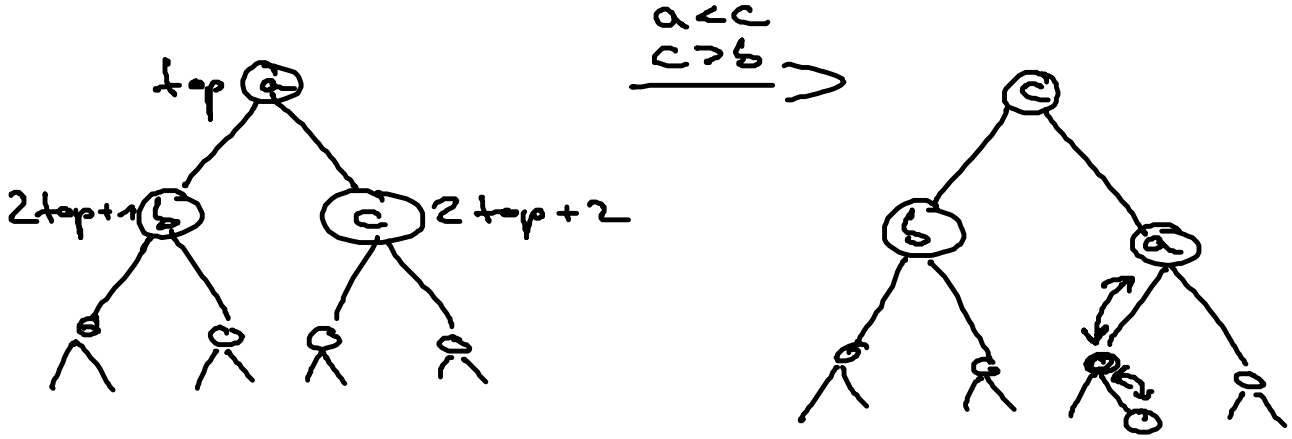


- setze voraus, dass Heapeigenschaft erfüllt ist im Teilarray von top+1 bis bottom
- stelle dann sicher, dass Heapeigenschaft erfüllt ist von top bis bottom

1) Ermittle das größere der beiden Kinder „child" (falls Kinder existieren und im vorgegeb. Bereich liegen)

2) vergleiche vec[top].key mit vec[child].key
Falls vec[top].key > vec[child].key, fertig!
Sonst: vertausche Einträge von top und child.

3) Wende heapify rekursiv an auf den Bereich child, ..., bottom.



Korrektheit der Methode folgt aus Austausch + rekursivem Aufruf.

=> Heapeigenschaft kann also durch wiederholtes Aufrufen von heapify hergestellt werden.

```
/**
 * turns array into a heap
 * @param vec the array to which this happens
 */
private static void createHeap(Item[] vec) {
        for (int i = vec.length/2 - 1; i >= 0; i--) {
                heapify(vec, i, vec.length - 1);
        }
}
```

```
/**
 * establishes heap property in a certain range
 * @param vec the array in which this happens
 * @param top start of the range
 * @param bottom end of the range
 */
private static void heapify(Item[] vec, int top, int bottom) {
        Item temp;
        int child;

        if (2*top+1 > bottom) return; // nothing to do

        if (2*top+2 > bottom) {
                // vec[2*top+1] is only child of vec[top]
                child = 2*top+1;
        } else {                    // 2 sons, determine bigger one
                if (vec[2*top+1].key > vec[2*top+2].key) {
                        child = 2*top+1;
                } else {
                        child = 2*top+2;
                }
```

```
        }//endif

        // check if exchange is necessary
        if (vec[top].key < vec[child].key) {
                temp = vec[top];
                vec[top] = vec[child];
                vec[child] = temp;
                // recursive call for possible further exchanges
                heapify(vec, child, bottom);
        }//endif
}
```

Beispiel:

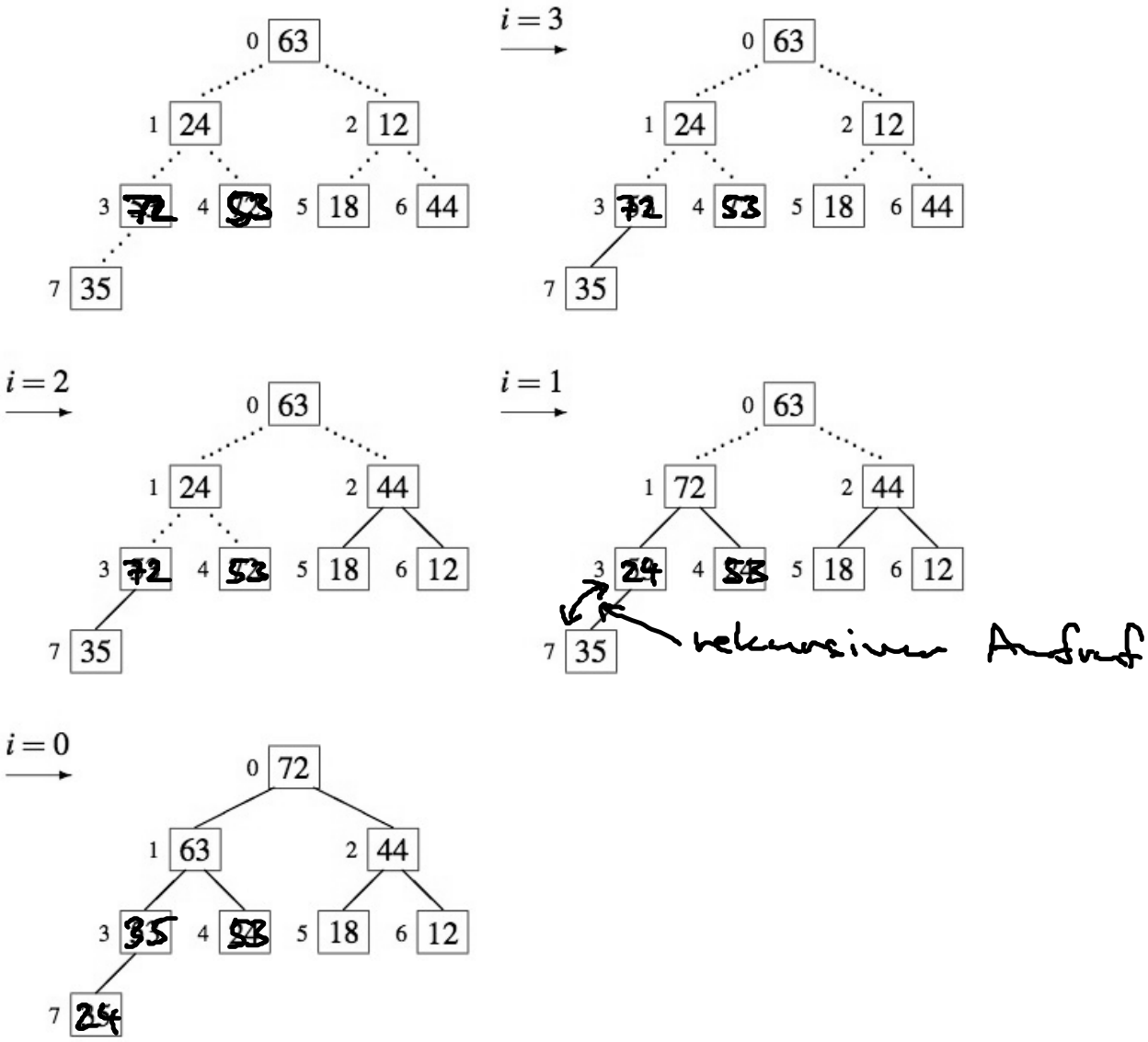


Abbildung 10.14: Ein Beispiel für `createHeap()`.

Theorem: Das Herstellen der Heapeigenschaft funktioniert mit Laufzeit $O(n)$.