

P und NPModul Klausur:

- 2 Termine: vor mündl. Prüfung: 2 schriftl. Versuche
- Anmeldung: QISPOS, bis 3 Tage vor Prüfung
Vorr: Bachelor Student, CoMo I+II Schein eingetr.
PAN-Liste,
andere Studenten: Anmeldung bei Prüfungsamt
- Inhalt: VL, aller Stoff (Anwendungen, Beweise, kein Java code, Pseudocode)
- Zeit: 150 Minuten
- Material: Stifte, kein Papier, Taschenrechner, Buch

P und NP

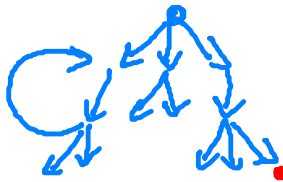
Entscheidungsproblemen: Problemklassen stellen Ja/Nein Fragen
 Bsp: \exists Clique mit $\geq k$ Elementen in Graph G ?

Klasse P: Problem p' ist in P: es ex. determ. TM die jede Instanz von p' in polynom. Zeit bezgl. Eingabegröße entscheidet.

Bsp: Ist kürz. st Weg kürzer als l ?
 Eingabe Größen: Kanten, Knoten, st, Kantenlängen

Klasse NP: nichtdeterm. Turingmaschinen:
 anstatt fester Übergangsfkt. δ gibt es Menge möglicher Übergänge als Relation
 • NTM wählt einen möglichen Übergang aus

Akzeptanz: NTM ein Wort w akz. falls es eine Folge von Übergängen gibt, so dass die NTM in akzep. Zustand endet



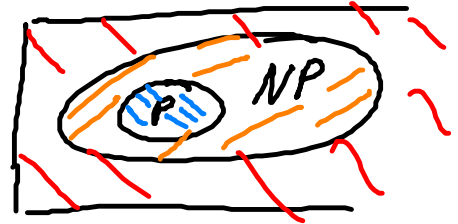
• akzept. Zustand \Rightarrow NTM akzeptiert Wort w

Laufzeit: Länge eines kürz. Pfades in akzept. Zustand

NP: (nichtdeterministisch polynomial) **NICHT: nicht polynomial**

Problem p' ist in NP: nichtdeterm. TM existiert, die jede Instanz von p' in Polynomialzeit entscheidet

Abschaulich: P: leichten Probleme
 NP: leichten + schweren Probleme (oben entscheidbare)



äquivalente Def. für NP:

Problem $p' \in NP$: \exists Zertifikat für Ja-Instanzen, das in Polynomialzeit prüfbar ist und die Ja-Antwort beweist. (Zertifikat hat Polyn. Länge)

Bsp: • kürzester s-t Weg $\leq k$? Zertifikat: s-t Weg mit Länge $\leq k$
 • oder leeres Zertifikat

• Clique mit $\geq k$ Elementen? Zert: Clique mit k Elementen

\Rightarrow Probleme in NP: leicht Lösung zu verifizieren, finden vermutlich nicht

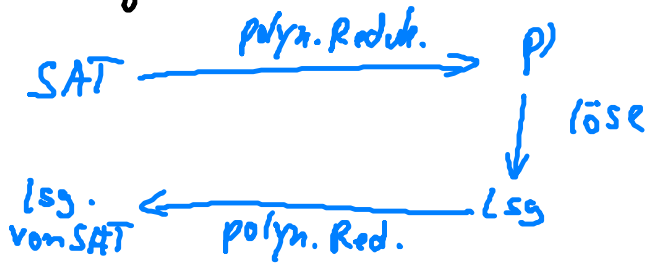
weitere Unterscheidungen:

$p' \in NP$	$p' \in NP-C$ (NP vollständig)	p' ist NP schwer
<ul style="list-style-type: none"> • NTM entsch. p' in Polynomialzeit • Clique, SAT • kürzeste Wege 	<ul style="list-style-type: none"> - $p' \in NP$ - p' ist NP schwer • Clique, SAT \rightarrow alle Probleme in NP über polyn. Reduktion auf Problem in NP-C lösbar 	<ul style="list-style-type: none"> • p' ist min. so schwer wie jedes andere Probl. in NP • Probl. aus NP per polyn. Red. über p' lösbar - Clique, SAT - Halteproblem

Wichtigkeit von $P \neq NP$?

- nahezu alle Optimierungsprobleme sind NP-vollständig
 $\Rightarrow \exists$ polyn. Algo.?
- Kryptographische Fragen
- Scheinbar verifizieren leichter als lösen

Reduktionen: Ziel: zeig dass Problem NP vollst. ist
• zeig dass P andere Probleme aus NP-C löst



2. Typen:
- Ähnliche Probleme (Spezialfälle)
 - Gadgets (konstruierte)

Ähnliche Probleme:

$SAT \rightarrow 3SAT$

- Reduktion: Klauseln verlängern/verkürzen

$$x_1 \vee x_2 \Rightarrow x_1 \vee x_2 \vee \bar{y} \\ x_1 \vee x_2 \vee y$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$$

$$\Rightarrow x_1 \vee x_2 \vee y$$

$$\bar{y} \vee x_3 \vee x_4$$

• unabhängige Mengen:

- Komplement \bar{G} :

$$\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E}) \text{ mit } \bar{V} = V \\ \bar{E} = \{e \mid e \notin E\}$$

3SAT: Gegeben Var. $x_i, 1 \leq i \leq n$
Klauseln $C_i, 1 \leq i \leq m$
jede Klausel besitzt exakt 3 Literale

Frage: \exists eine Belegung, s.d. in jeder Klausel min. 1 Literal erfüllt ist?

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3, x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$$

\rightarrow Ja: $x_1 = \text{true}$
 $x_2 = \text{true}$

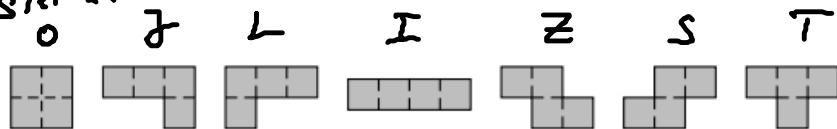
Gegeben: Graph $G(V, E), K \in \mathbb{N}$

Frage: $\exists U \subset V$ mit $|U| = K$
s.d. keine Kante zwischen Knoten aus U

\Rightarrow Clique in G ist
unabh. Menge in \bar{G}

Konstruktionen / Gadgets:

Steine:



Tetris-Clearance:

Gegeben: • gefülltes Feld mit Steinen
• Steinfolge

Frage: Kann ich das Tetrisfeld leeren.

Regel: Reihe verschwindet, sobald sie voll mit Steinen ist

Reduktion: 3-Partition

Gegeben: $A, a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$

Frage: \exists disj. Teilmengen $J_1, \dots, J_{n/3}$ mit

$$|J_i| = 3, \quad \bigcup_{i=1}^{n/3} J_i = A$$

$$\sum_{a \in J_i} a = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n/3}$$

• gibt es 3er Mengen
mit jeweils gleicher Summe?

Bsp: 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 7

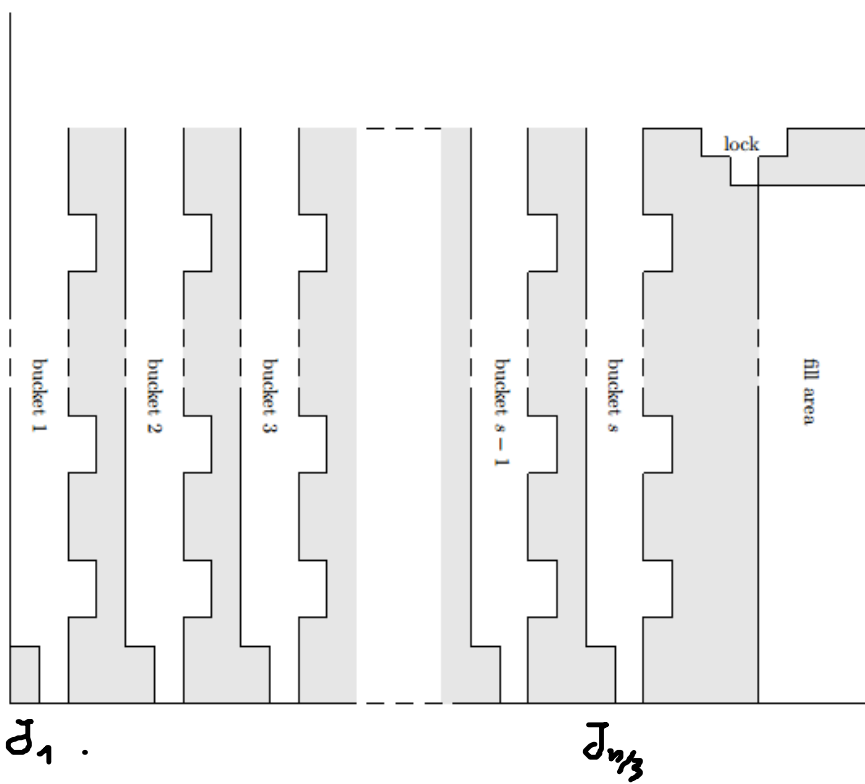
$$\cancel{1, 2, 2} \quad \cancel{2, 3, 3} \quad \cancel{4, 6, 7} \quad \leq 10$$

$$(7, 2, 1) \quad (3, 3, 4) \quad (6, 2, 2)$$

3-Partition ist NP-vollst. \Rightarrow 3-Part. auf Tetris Reduzieren

Instanz von Tetris:

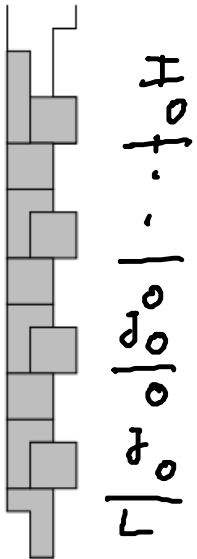
Feld:



Ziel der Instanz:

- buckets füllen, per Zahlen a_i mit gleicher Summe
- T stück löscht erste beiden Reihen
- Folge von I-stücken löscht Rest

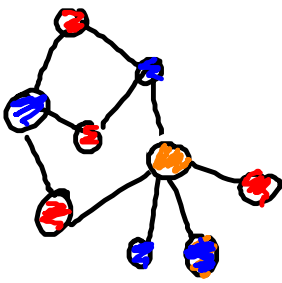
a_i als Steine: $L, \underbrace{0J0, 0J0, \dots, 0J0}_{a_i\text{-mal}}, 0I$



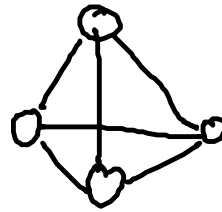
\Rightarrow 3 Partition löscht Tetris Feld
rückwärts richtung schwerer

weitere Reduktion: 3-Färbbarkeit:

Frage: kann man Knoten in Graph färben, so daß Knoten mit Kante dazw. versch. Farben besitzen, wenn es max. 3 Farben gibt?



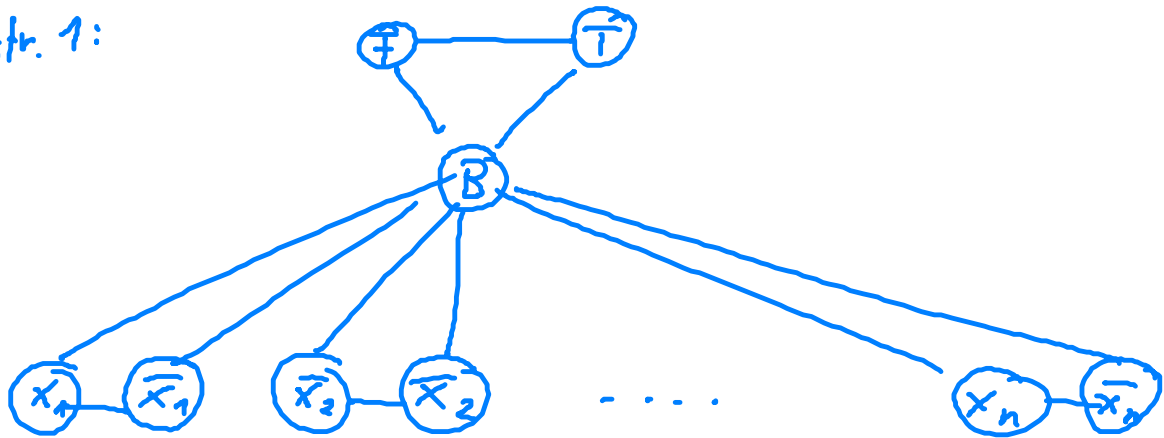
3 färbbar



nicht 3 färbbar

Reduktion: 3SAT \rightarrow 3 Färbbarkeit

Konstr. 1:



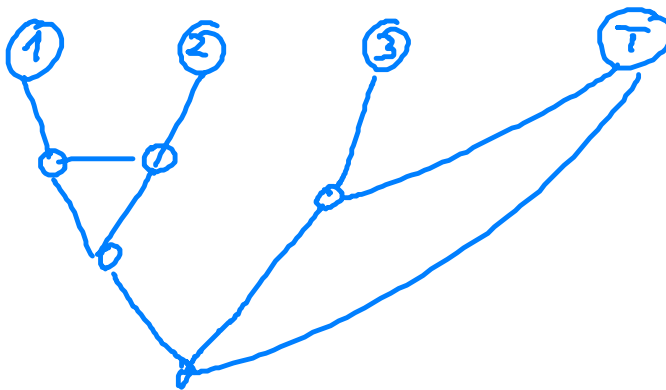
- Farbe von \textcircled{F} heißt falsch
 \textcircled{T} heißt wahr

\textcircled{B} = blank

$\Rightarrow x_i$ ist wahr/falsch gefärbt

x_i ist wahr gefärbt $\Rightarrow \bar{x}_i$ falsch ist

Konstrukt 2: (Klausel Konstrukt)



• ① und ② und ③ falsch $\Rightarrow \exists$ keine Färbung

• ① oder ② oder ③ wahr $\Rightarrow \exists$ Färbung

Beispiel: $x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$
als 3-Färbbarkeit

