

CoMa Übung
 Universelle TM & Unentscheidbarkeit

- Ansagen:
- beste Hive GUI wird ausgezeichnet
 - Ligabetrieb: KI in SVN laden
 - ↳ hochladen bis So. 23:59 => entfällt Rücksprache für Firma

Erweiterung Turing Maschinen:

- mehrere Spuren
- mehrere Bänder } einfachere TM aber gleiche Möglichkeiten

Universellen TM:

Erinnerung TM1 aus letzter Übung

$\Gamma = \{0, 1\}$ $\Sigma = \{0, 1, B\}$
 $Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_0\}$

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, N)$	(q_0, B, N)
q_1	$(q_1, 0, N)$	$(q_1, 1, N)$	(q_1, B, N)

akzeptiert Wörter 0^n

Idee UTM: - Eingabe = TM und w , simuliere TM mit w

o.B.d.A: $\Gamma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, 1, B\}$

Gödelnummer: - Möglichkeit die TM an die UTM zu übergeben

- $\delta(q_i, x_j) = (q_k, x_l, D_m)$
- $0^i 1 0^j 10^k 10^l 10^m$ pro δ -Eintrag
- zwischen Einträgen: 11
- Am Anfang & Ende: 111

$D_0 = L$ $\epsilon = \text{leeres Wort}$
 $D_1 = R$ $D_2 = N$

Beispiel: $\langle TM1 \rangle$:
 $111 \underbrace{\epsilon 1 \epsilon 1 \epsilon 1 \epsilon 1 0}_{\delta(q_0, 0)} 11 \underbrace{\epsilon 1 0 1 0 1 0 1 0 0}_{\delta(q_0, 1)} 11 \dots 111$

Aufbau UTM: 3 Bänder, 1. Band speichert Zustand der TM
 2. Band speichert die TM (S-Tabelle)
 dient zum Nachschlagen
 3. Band Eingabe der TM, wird beim Berechnen genutzt

Sinn: - analog zu realen Computer ist Eingabe der Algor. + "Wert"
 - kann alles berechnen, kein Umbauen der UTM nötig

Wiederholung: Sprache L heißt rekursiv/entscheidbar:
 - ex. TM die auf allen Eingaben stoppt
 - $w \in L \Leftrightarrow w$ ^{wird} von TM akzeptiert
 → Beispiele: $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ oder Palindrome über $\{0, 1\}$

Sprache L heißt rekursiv aufzählbar/semientsh.:
 - $w \in L \Leftrightarrow w$ wird von TM akzeptiert
 - Maschine muss nicht stoppen

Rekursivität von Sprachen:

L_1, L_2 rekursiv

- 1) $\Rightarrow \overline{L_1}$ rekursiv
- 2) $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ rekursiv
- 3) $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ rekursiv

Beweis:

1) $\neq HA$

2) - TM für L_1 und L_2 simulieren

- jeweils parallel auf Kopie der Eingabe ausführen

- akzeptiert eine TM, wird Eingabe akzeptiert

3) $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

Unentscheidbarkeit:

In der Mathematik gibt es keine unlösbaren Probleme. Hilbert, 1900

Kontinuums hypothese:

$$\forall S \subseteq \mathbb{R} : |S| \in \mathbb{N} \vee |S| = |\mathbb{N}| \vee |S| = |\mathbb{R}|$$

Gödel, 1936: Kontinuums hypothese lässt sich nicht widerlegen.

Cohen, 1960: Kontinuums hypothese lässt sich nicht beweisen. (in Zermelo Fraenkel Mengenlehre)

bei uns: Halteproblem nicht entscheidbar

Busy Beaver: (Fließiger Biber)

Frage: wie lang läuft eine Turingmaschine mit $|Q|=n$ maximal? wieviele 1 kann sie maximal schreiben?

(Vorr: TM stoppt nach endl. vielen Schritten)

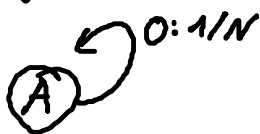
Könnte Halteproblem lösen: lasse TM so lang laufen, wie Busy Beaver mit gleicher Anzahl Zuständen läuft

Def: $\Sigma(n) := \# \text{Einsen eines Busy Beavers mit } n \text{ Zuständen}$
Einschub: - starte mit leeren Band
- behandle 0/B gleich

$\Sigma(n)$ ist nicht berechenbar

Busy Beaver für $|Q|$:

- $|Q|=1$

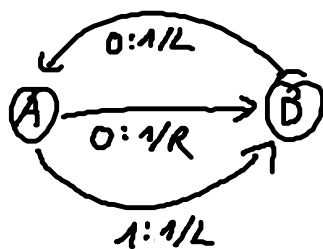


⊢ A0
⊢ A1

1 Schritt
1 Eins

$$\Sigma(1) = 1$$

- $|Q|=2$

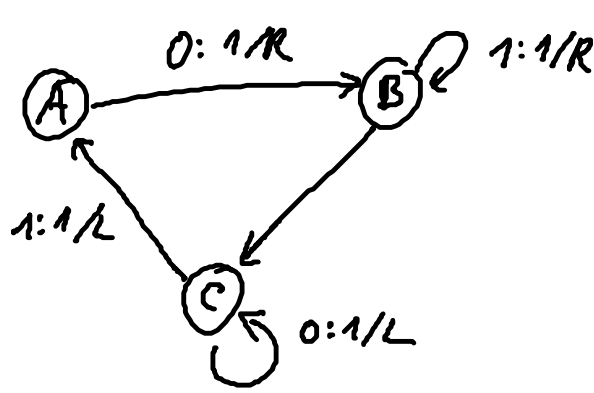


A0
⊢ 1B0
⊢ A11
⊢ B011
⊢ A0111
⊢ 1B111
⊢ Abbruch

6 Schritte
4 Einsen

$$\Sigma(2) = 4$$

- |Q| = 3



14 Schritte
6 Einsen
 $\Sigma(3) = 6$

- |Q| = 5

- busy bevor nicht bekannt
- bester Kandidat: 4098 Einsen
> 47 Mio. Schritte
(8 hat 10 Einträge)

- Σ steigt schnell an

$\Sigma(3) = 6$

$\Sigma(4) = 13$

$\Sigma(8) = 3 \uparrow \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27}$

$\Sigma(10) = 3 \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow 3^3$

$\Sigma(12) = 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$

Knuth Arrow Up Notation

$a \cdot b = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ mal}}$

$a \uparrow b = a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ mal}}$

$a \uparrow \uparrow b = a \uparrow (a \uparrow (a \uparrow (\dots)))$
 $= \underbrace{a^{a^a}}_{b \text{ mal}}$

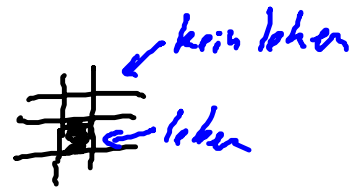
→ nicht berechenbar!

Einschub: Game of Life

Spiel: - unendliches Gitter



- 2 Zustände: Leben/kein Leben: pro Zelle

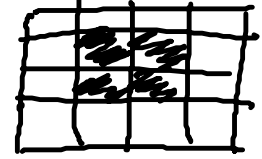
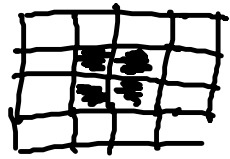


- Übergang von Zeitpunkt ~~z~~ um nächsten:

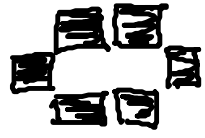
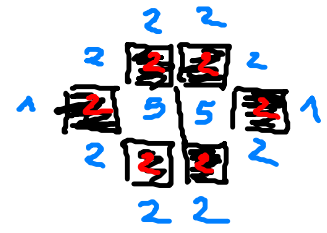
- lebendige: 2-3 Nachbarn → überlebt
- leere Zelle: 3 Nachbarn → Leben entsteht

$\delta(\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}) \rightarrow \square$ stirbt, da 4 Nachbarn

statische Zustände



(Block)



→ Bleibt Zustand irgendwann stehen?

Game of life enthält universelle Turing Maschine

→ Halte problem