CoMa Übung 12.6.13

Universelle TM & Unentscheidbarkeit

Ansagen: – beste Hive GUI wird ausgezeichnet
– Ligabetrieb: KI in SVN laden
↳ hochladen bis So. 23:59 ⇒ entfällt Rücksprache für Firma

Erweiterung Turing Maschinen:

– mehrere Spuren } einfachere TM aber
– mehrere Bänder } gleiche Möglichkeiten

Universellen TM: Erinnerung TM1 aus letzter Übung

$\Gamma = \{0,1\}$ $\Sigma = \{0,1,B\}$

$Q = \{q_0, q_1\}$, $F = \{q_0\}$

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, N)$	(q_0, B, N)
q_1	$(q_1, 0, N)$	$(q_1, 1, N)$	(q_1, B, N)

akzeptiert Wörter 0^n

Idee UTM: – Eingabe = TM und w, simuliere TM mit w

o.B.d.A: $\Gamma = \{0,1\}$, $\Sigma = \{0,1,B\}$

Gödelnummer: – Möglichkeit die TM an die UTM zu übergeben

- $\delta(q_i, x_j) = (q_k, x_l, D_m)$
- $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$ pro δ-Eintrag
- zwischen Einträgen: 11
- Am Anfang & Ende: 111

$D_0 = L$
$D_1 = R$ $D_2 = N$
ε = leeres Wort

Beispiel: $\langle TM1 \rangle$:

$$111 \underbrace{\overset{(q_0,0)\to(q_0,0,R)}{\varepsilon 1 \varepsilon 1 \varepsilon 1 \varepsilon 1 0}}_{\delta(q_0,0)} 11 \underbrace{\varepsilon 1 0 1 0 1 0 1 0 0}_{\delta(q_0,1)} 11 \ldots\ldots 111$$

Aufbau UTM: 3 Bänder, 1. Band speichert Zustand der TM
2. Band speichert die TM (δ-Tabelle) dient zum Nachschlagen
3. Band Eingabe der TM, wird beim Berechnen genutzt

Sinn: - analog zu realem Computer ist Eingabe der Algor. + „Wert"
- kann alles berechnen, kein Umbauen der UTM nötig

Wiederholung: Sprache L heißt rekursiv/entscheidbar:
- ex. TM die auf allen eingaben stoppt
- $w \in L \iff w$ wird von TM akzeptiert
→ Beispiele: $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ oder Palindrome über $\{0,1\}$

Sprache L heißt rekursiv aufzählbar/semientsch.:
- $w \in L \iff w$ wird von TM akzeptiert
- Maschine muss nicht stoppen

Rekursivität von Sprachen:
L_1, L_2 rekursiv
1) $\Rightarrow \overline{L_1}$ rekursiv
2) $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ rekursiv
3) $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ rekursiv

Beweis:
1) HA
2) - TM für L_1 und L_2 simulieren
- jeweils parallel auf Kopie der Eingabe ausführen
- akzeptiert eine TM, wird Eingabe akzeptiert
3) $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$

Unentscheidbarkeit: In der Mathematik gibt es keine unlösbaren Probleme. Hilbert, 1900

Kontinuumshypothese:

$$\forall\ S \subseteq \mathbb{R}: \quad |S| \in \mathbb{N} \ \vee\ |S| = |\mathbb{N}| \ \vee\ |S| = |\mathbb{R}|$$

Gödel, 1936: Kontinuumshypothese lässt sich nicht widerlegen.

Cohen, 1960: Kontinuumshypothese lässt sich nicht beweisen. (in Zermelo Fraenkel Mengenlehre)

bei uns: Halteproblem nicht entscheidbar

<u>Busy Beaver:</u> (Fleißiger Biber)

Frage: wie lange läuft eine Turingmaschine mit $|Q| = n$ maximal? wieviele 1 kann sie maximal schreiben?
(Vorr: TM stoppt nach endl. vielen Schritten)

Könnte Halteproblem lösen: lasse TM so lange laufen, wie Busy Beaver mit gleicher Anzahl Zuständen läuft

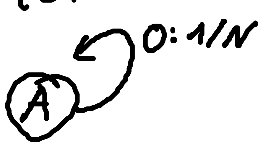
<u>Def</u>: $\Sigma(n) :=$ # Einsen eines Busy Beavers mit n Zuständen

Einschub: - starte mit leerem Band
- behandle 0/B gleich

$\Sigma(n)$ ist nicht berechenbar

Busy Beaver für $|Q|$:

- $|Q| = 1$

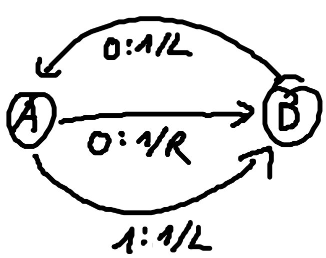


A0
$\vdash$ A1

1 Schritt
1 Eins

$\Sigma(1) = 1$

- $|Q| = 2$

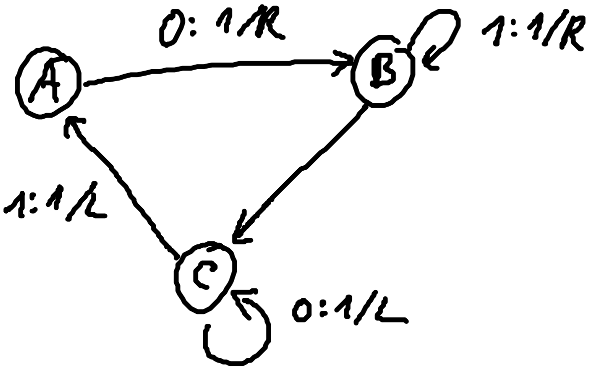


A0
$\vdash$ 1B0
$\vdash$ A11
$\vdash$ B011
$\vdash$ A0111
$\vdash$ 1B111
$\vdash$ Abbruch

6 Schritte
4 Einsen

$\Sigma(2) = 4$

- $|Q|=3$



14 Schritte
6 Einsen

$\Sigma(3)=6$

- $|Q|=5$
  - busy beaver nicht bekannt
  - bester Kandidat: 4098 Einsen
    $>$ 47 Mio. Schritte
    (δ hat 10 Einträge)

- Σ steigt schnell an

$\Sigma(3)=6$

$\Sigma(4)=13$

$\Sigma(8) = 3\uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27}$

$\Sigma(10) = 3\uparrow\uparrow\uparrow 3 \quad 3\uparrow\uparrow 3^{3^3}$

$\Sigma(12) = \underbrace{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}_{\text{Knuth Arrow Up Notation}}$

$a\cdot b = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{b\text{ mal}}$

$a\uparrow b = a^b = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a \cdots a}_{b\text{ mal}}$

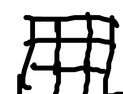
$a\uparrow\uparrow b = \underbrace{a\uparrow(a\uparrow(a\uparrow(\dots)))}_{b\text{ mal}}$

$= \left. a^{a^{a}} \right\} b\text{ mal}$

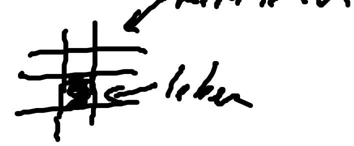
$\rightarrow$ nicht berechenbar!

__Einschub:__ Game of Life

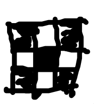
Spiel:
- unendliches Gitter

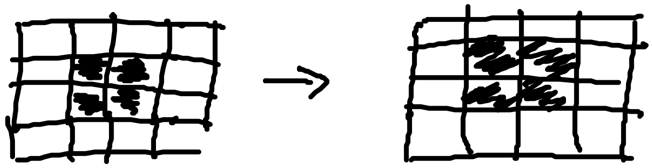


- 2 Zustände: Leben/kein leben: pro Zelle

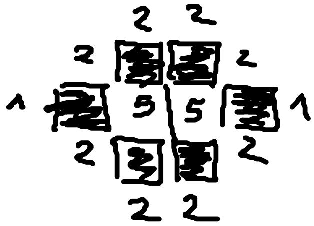


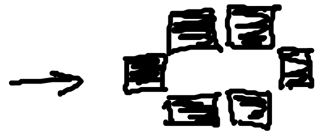
- übergang von Zeitpunkt zum nächsten:
  - Lebewesen: 2-3 Nachbarn $\rightarrow$ überlebt
  - leere Zelle: 3 Nachbarn $\rightarrow$ leben entsteht

$\delta($  $) \rightarrow \square$ stirbt, da 4 Nachbarn stationäre Zustände



(Block)





→ Bleibt Zustand irgendwann stehen?

Game of life enthält universelle Turing Maschine

→ Halteproblem