Technische Universität Berlin **SS 2013**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Frau Kiefer

Prof. Dr. Martin Skutella
Torsten Gellert
Martin Groß
Dr. Max Klimm

Aylin Acikel, Katharina Bütow, Christian Döblin, Alexander Hopp, Daniel Kuske, Olivia Röhrig, Robert Rudow, Daniel Schmand, Hendrik Schrezenmaier, Mona Setje-Eilers, Judith Simon, Sebastian Spies, Fabian Wegscheider, Jan Zur

12. Übungsblatt Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: 02.07.2013 (bis 14:15 Uhr in MA004)

Dies ist das letzte Hausaufgabenblatt.

1. Aufgabe (4 + 4 Punkte)

Für eine Turingmaschine T bezeichne $s(T)$ die Laufzeit der Maschine, falls sie auf dem leeren Band ε gestartet wird und hält, d.h.,

$$s(T) := \begin{cases} \#\text{ Schritte, die } T \text{ macht, bis ein Haltezustand erreicht wird,} & \text{falls } T \text{ auf } \varepsilon \text{ hält,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine Famile $\mathcal{T}$ von Turingmaschinen sei $s(\mathcal{T}) := \max\{s(T) \mid T \in \mathcal{T}\}$ das Maximum der Laufzeiten der Turingmaschinen aus $\mathcal{T}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{T}_n$ die (endliche) Menge aller Turingmaschinen mit $n+1$ Zuständen über dem Alphabet $\{1, B\}$, die dabei maximal n Zustände zum Rechnen benutzen und einen ausgezeichneten Haltezustand besitzen. Wir definieren die Funktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $n \mapsto s(\mathcal{T}_n)$. Die Funktion S heißt *Maximum-Shift*-Funktion und wächst sehr schnell:

n	$S(n)$
1	1
2	6
3	21
4	107
5	$\geq 47.176.870$
6	$\geq 7{,}4 \cdot 10^{36534}$

Zeigt, dass die Maximum-Shift-Funktion nicht berechenbar ist.

Hinweis: Benutzt das spezielle Halteproblem H_ε.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{T}'_n$ die Teilmenge der Turingmaschinen in $\mathcal{T}_n$, bei denen sich der Kopf nach jedem Zustandswechsel nur nach rechts bewegt, solange die Maschine nicht stoppt. Wir definieren die Funktion $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $n \mapsto s(\mathcal{T}'_n)$.

Zeigt, dass R berechenbar ist.

2. Aufgabe (4 + 4 + 4 Punkte)

Für eine Turingmaschine M, bezeichne $L(M)$ die von M akzeptierte Sprache. Überprüft für die folgenden Sprachen, ob sie rekursiv oder unentscheidbar sind und gebt einen entsprechenden Beweis an.

(a) $H_{\text{all}} := \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Eingaben}\}$,

(b) $L_{\text{EQ}} := \{\langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$,

(c) $L_z := \{\langle M \rangle w \mid M \text{ erreicht bei Eingabe } w \text{ jemals den Zustand } z\}$.