Technische Universität Berlin **SS 2013**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Frau Kiefer

Prof. Dr. Martin Skutella
Torsten Gellert
Martin Groß
Dr. Max Klimm

Aylin Acikel, Katharina Bütow, Christian Döblin, Alexander Hopp, Daniel Kuske, Olivia Röhrig, Robert Rudow, Daniel Schmand, Hendrik Schrezenmaier, Mona Setje-Eilers, Judith Simon, Sebastian Spies, Fabian Wegscheider, Jan Zur

11. Übungsblatt Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: 25.06.2013 (bis 14:15 Uhr in MA004)

Dies ist das vorletzte Hausaufgabenblatt.

In den Beweisen auf diesem Blatt muss die Funktionsweise der Turingmaschinen nur noch grob verbal beschrieben werden – eine Angabe der Zustände, der Übergangsfunktion, etc. ist nicht notwendig.

1. Aufgabe (3 + 3 + 1 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über Σ. Das *Komplement von* L ist definiert als $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$. Beweist die folgenden Aussagen:

(a) L ist genau dann rekursiv, wenn $\overline{L}$ rekursiv ist.

(b) L ist genau dann rekursiv, wenn L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind.

(c) Die rekursiv aufzählbaren Sprachen sind unter Komplementbildung nicht abgeschlossen. Das heißt aus L rekursiv aufzählbar folgt nicht, dass $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar ist.

Hinweis: Ihr dürft annehmen, dass es nicht rekursive, aber rekursiv aufzählbare Sprachen gibt.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigt, dass eine Sprache L genau dann rekursiv ist, wenn es eine Turingmaschine M gibt, die die Wörter in L in nicht-fallender Wortlänge ausgibt. Nehmt an, dass L unendlich ist.

3. Aufgabe (2 + 3 + 4 Punkte)

Für diese Aufgabe könnt ihr annehmen, dass es eine Turingmaschine M gibt, die einen beliebigen (endlichen) Präfix der Dezimaldarstellung der Kreiszahl π in endlicher Zeit berechnet.

(a) Sei $f_1 : \{0, 1, \ldots, 9\}^* \to \{0, 1\}$ wie folgt definiert:

$$f_1(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ ist Anfang der Dezimaldarstellung von } \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigt, dass f_1 total rekursiv ist.

(b) Sei $f_2 : \{0, 1, \ldots, 9\}^* \to \{0, 1\}$ definiert als

$$f_2(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ kommt (als geschlossener Block) in der Dezimaldarstellung von } \pi \text{ vor.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigt, dass $f_2^{-1}(1)$ rekursiv aufzählbar ist.

(c) Sei $f_3 : \{0, 1, \ldots, 9\}^* \to \{0, 1\}$ definiert als

$$f_3(x) := \begin{cases} 1 & \text{die Dezimaldarstellung von } \pi \text{ enthält } val(x) \text{ aufeinanderfolgende Dreien.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $val(x)$ der Wert der Eingabe als Dezimalzahl interpretiert. Ist f_3 rekursiv? Begründet eure Antwort.

Hinweis: Nutzt die Monotonie der Funktion f_3.

Viel Spaß und Erfolg!