Technische Universität Berlin **SS 2013**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Frau Kiefer

Prof. Dr. Martin Skutella
Torsten Gellert
Martin Groß
Dr. Max Klimm

Aylin Acikel, Katharina Bütow, Christian Döblin, Alexander Hopp, Daniel Kuske, Olivia Röhrig, Robert Rudow Daniel Schmand, Hendrik Schrezenmaier, Mona Setje-Eilers Judith Simon, Sebastian Spies, Fabian Wegscheider, Jan Zur

7. Übungsblatt Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: 28.05.2013 (bis 14:15 Uhr in MA 004)

1. Aufgabe (5 Punkte)

In dieser Aufgabe seht ihr, warum es bei der Berechnung optimal statischer Suchbäume sinnvoll ist, sich die Zwischenergebnisse abzuspeichern. Betrachtet hierzu den folgenden rekursiven Algorithmus zur Berechnung optimal statischer Suchbäume, der sich keine Zwischenergebnisse merkt.

optimalStaticTree($\beta_1, \ldots, \beta_n$ ***)***
Input: Wahrscheinlichkeiten $\beta_1, \ldots, \beta_n$
Output: Kosten eines optimalen statischen Suchbaums für $\beta_1, \ldots, \beta_n$
RETURN ***recurse***$(1, n)$

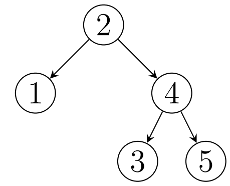
recurse(i, j ***)***
Input: Schlüsselindizes i, j
Output: Kosten eines optimalen statischen Suchbaums für $\beta_i, \ldots, \beta_j$
IF $i > j$ **THEN**
  RETURN 0
ENDIF
`mincost` := ∞, `sumbeta` :=0
FOR k := i **TO** j **DO**
  `sumbeta` := `sumbeta` + β_k
  `cost` := ***recurse***($i, k-1$) + ***recurse***($k+1, j$)
  IF `mincost` > `cost` **THEN**
    `mincost` := `cost`
  ENDIF
ENDFOR
RETURN `mincost` + `sumbeta`

Sei $A(n)$ die Anzahl der Additionen, die dieser Algorithmus für n Schlüssel ausführt. Zeigt, dass gilt: $A(n) \geq 3^{n-1}$ für $n \geq 1$.

2. Aufgabe (3 + 4 Punkte)

(a) Bestimmt einen optimalen statischen Suchbaum für die Schlüsselmenge $S = \{1, 2, 3, 4\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\beta_1 = 0.4, \beta_2 = 0.2, \beta_3 = 0.1, \beta_4 = 0.3$ für die Zugriffe.

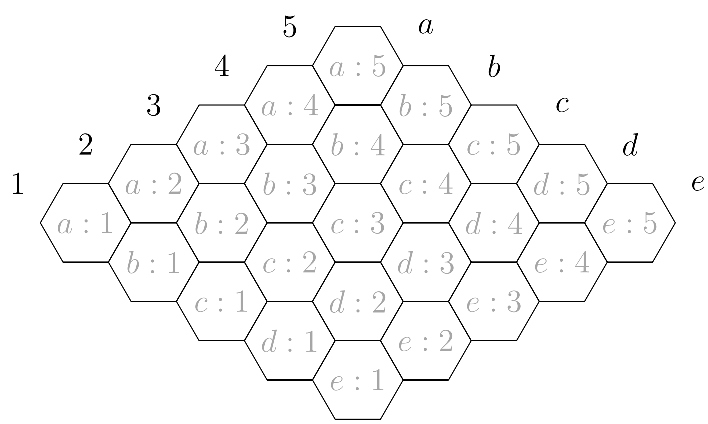
(b) Wie könnte man das Beispiel aus (a) verwenden, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\beta_1, \ldots, \beta_5$, zu konstruieren, bezüglich der der rechts angegebene Suchbaum ein optimal statischer Suchbaum für die Schlüsselmenge $\{1, \ldots, 5\}$ ist? Führt eure Konstruktion aus und gebt eine solche Verteilung an.



3. Aufgabe (1 + 3* + 2 + 5 Punkte)

Betrachtet das Spiel Diag auf einem 5×5-Feld. Beide Spieler A und B markieren abwechselnd ein beliebiges unmarkiertes Feld mit ihrem Zeichen. Spieler A beginnt. Spieler A hat genau dann gewonnen, wenn er mit „seinen“ Feldern einen Weg von irgendeinem Feld der Spalte 1 zu irgendeinem der Spalte 5 konstruiert hat, bevor B mit seinen eigenen Feldern entsprechend einen Weg von Zeile a nach Zeile e fertigstellt.

Eine *Strategie* eines Spielers ist eine Vorschrift, die jedem gültigem Zustand des Spielbretts einen gültigen Zug zuweist, in diesem Fall also ein freies Feld, auf das der nächste Spielstein gelegt werden soll. Eine *Gewinnstrategie* ist eine Strategie, die für jede Strategie des Gegenspielers zum Gewinnen des Spiels führt.



Man beachte, dass Zeilen und Spalten diagonal verlaufen.

(a) Gebt eine kurze Begründung, dass es auf auf einem Feld der Größe $n \times n$ kein Unentschieden geben kann.

(b) *(Optional)* Beweist formal korrekt, dass auf einem Feld der Größe $n \times n$ genau einer der Spieler A oder B eine Gewinnstrategie hat.

(c) Für welchen Spieler existiert eine Gewinnstrategie, sofern man auf einem Feld der Größe $n \times n$ spielt? Begründet eure Aussage.

(d) Wie sieht in diesem 5×5 Feld eine Gewinnstrategie des unter (c) bestimmten Spielers aus?