Technische Universität Berlin **SS 2013**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Frau Kiefer

Prof. Dr. Martin Skutella — Aylin Acikel, Katharina Bütow, Christian Döblin,
Torsten Gellert — Alexander Hopp, Daniel Kuske, Olivia Röhrig, Robert Rudow
Martin Groß — Daniel Schmand, Hendrik Schrezenmaier, Mona Setje-Eilers
Dr. Max Klimm — Judith Simon, Sebastian Spies, Fabian Wegscheider, Jan Zur

6. Übungsblatt Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: 21.05.2013 (bis 14:15 Uhr in MA 004)

1. Aufgabe $(5+5+3$ Punkte$)$

In Anlehnung an AVL-Bäume nennen wir binäre (Such-)Bäume mit der folgenden Balance-Eigenschaft *knotenbalanciert*:

> *Für jeden Knoten im Baum ist die Differenz der Knotenanzahl zwischen dem linken und dem rechten Teilbaum des Knotens betragsmäßig höchstens eins.*

Erinnerung: Ein binärer Baum heißt *höhenbalanciert*, falls für jeden Knoten die Differenz der Höhe des linken und rechten Teilbaums betragsmäßig höchstens eins ist.

(a) Beweist, dass die Höhe eines knotenbalancierten Suchbaumes mit n Knoten durch $\lfloor \log_2 n \rfloor$ nach oben beschränkt ist.

(b) Beweist, dass für alle Blätter eines knotenbalancierten Suchbaums gilt, dass die Differenz ihrer Höhen betragsmäßig höchstens eins ist.

(c) Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:

  (i) Jeder knotenbalancierte Suchbaum ist auch höhenbalanciert.

  (ii) Jeder höhenbalancierte Suchbaum ist auch knotenbalanciert.

2. Aufgabe $(3+4$ Punkte$)$

(a) Sei T ein kantenminimaler AVL-Baum mit Höhe $h \geq 2$, d.h. es gibt keinen AVL-Baum der gleichen Höhe mit weniger Kanten. Beweist, dass dann die beiden Teilbäume der Wurzel von T jeweils ein kantenminimaler AVL-Baum mit Höhe $h-1$ und ein kantenminimaler AVL-Baum mit Höhe $h-2$ sind.

(b) Für $h \geq 0$ bezeichne $p_1(h)$ die Anzahl aller kantenminimalen AVL-Bäume zu einer gegebenen Höhe h. Wir betrchten hier einen AVL-Baum als verwurzelten, binären Bäum. Das bedeutet, dass z.B. ein Baum, der aus einer Wurzel und ihrem linken Kind besteht, ein anderer Baum ist, als jener, der aus einer Wurzel und seinem rechten Kind besteht. Die Schlüsselwerte in den Knoten machen jedoch keinen Unterschied.

  (i) Beweist eine rekursive Formel für $p_1(h)$.

  (ii) Beweist eine explizite, d.h. nicht rekursive Formel für $p_1(h)$.

Viel Spaß und Erfolg!