Technische Universität Berlin **SS 2013**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Frau Kiefer

Prof. Dr. Martin Skutella
Torsten Gellert
Martin Groß
Dr. Max Klimm

Aylin Acikel, Katharina Bütow, Christian Döblin,
Alexander Hopp, Daniel Kuske, Olivia Röhrig, Robert Rudow,
Daniel Schmand, Hendrik Schrezenmaier, Mona Setje-Eilers,
Judith Simon, Sebastian Spies, Fabian Wegscheider, Jan Zur

5. Übungsblatt Computerorientierte Mathematik II

Abgabe: 14.05.2013 (bis 14:15 Uhr in MA 004)

1. Aufgabe $(2 + 3 + 2 + 2$ Punkte)

Ein Fibonacci-Baum T_h der Höhe h ist ein binärer Baum, der wie folgt rekursiv definiert ist: (i) T_{-1} ist der leere Baum; (ii) T_0 ist ein Baum aus genau einem Knoten; (iii) Für $h \geq 2$, ist ein Fibonacci-Baum T_h der Höhe h ein binärer Baum, dessen Wurzel als einen Teilbaum einen Fibonacci-Baum T_{h-1} der Höhe $h-1$ und als anderen Teilbaum einen Fibonacci-Baum T_{h-2} der Höhe $h-2$ hat.

(a) Findet und beweist eine explizite, d.h. nicht rekursive, Formel für die Anzahl Blätter $b(h)$ in einem Fibonacci-Baum T_h der Höhe h.

Hinweis: Die Fibonacci-Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots,$ definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$ und könnte bei der Lösung nützlich sein.

(b) Findet und beweist eine explizite Formel für die Anzahl Knoten $n(h)$ in einem Fibonacci-Baum T_h der Höhe h.

(c) Zeigt, dass für die Summe der Höhe aller Knoten $s(h) = \sum_{v \in T_h} h_{T_h}(v)$ in einem Fibonacci-Baum T_h der Höhe h die Formel $s(h) = \frac{2}{5}(h-1)F_{h+5} - \frac{h}{5}F_{h+4} + 2$ gilt.

(d) Die mittlere Höhe $\bar{H}(h) = s(h)/n(h)$ eines Baumes ist ein Maß für die erwartete Zugriffszeit auf einen zufälligen Schlüssel in einem Baum (der die Suchbaumeigenschaft erfüllt). Gebt eine (möglichst kleine) Konstante $c < 1$ an, sodass für alle Fibonacci-Bäume gilt, dass $\lim_{h\to\infty} \bar{H}(h) \leq c \cdot h$.

Hinweis: Verwendet $F_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ für große k.

2. Aufgabe (11 Punkte)

Sei T ein binärer Suchbaum. Beweist oder widerlegt folgende Aussagen:

(a) T ist voll $\Rightarrow$ T ist ein AVL-Baum.

(b) T ist ein AVL-Baum $\Rightarrow$ T ist voll.

(c) T ist ein Fibonacci-Baum $\Rightarrow$ T ist ein AVL-Baum.

(d) T ist ein AVL-Baum $\Rightarrow$ T ist Fibonacci-Baum.

(e) T ist ein AVL-Baum $\Rightarrow$ Die Anzahl der Knoten auf dem längsten Pfad von der Wurzel zu einem Blatt ist nie mehr als doppelt so hoch wie die Anzahl der Knoten des kürzesten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.

(f) Je zwei Blätter haben Höhenunterschied höchstens 1 $\Rightarrow$ T ist ein AVL-Baum.

(g) T ist ein AVL-Baum $\Rightarrow$ je zwei Blätter haben Höhenunterschied höchstens 1.

(h) Es gibt eine Konstante k, so dass für alle AVL-Bäume der Höhenunterschied zweier Blätter durch k beschränkt ist.

Hinweis: Ein Baum heißt **voll**, wenn jede Schicht bis auf evtl. die unterste voll besetzt ist.

Viel Spaß und Erfolg!